1 Questions préliminaires

question 1.1

1. *Comme on demande une base de $\mathcal{M}$ seulement en question suivante, on va montrer que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel avec la caractérisation de sous-espace vectoriel sans passer par $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel car il s'écrit commle sous-espace vectoriel enge,dré par des vecteurs particuliers.*

   $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel, or $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, donc c'est donc aussi un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
   - $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.
   - $\mathcal{M}$ n'est pas vide car contient la matrice nulle (prendre $a = b = 0$).
   - Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et soit $M_1 = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} c & id \\ i\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}$, en posant $z = \lambda a + c$ et $u = \lambda b + d$, on aura, puisque $\lambda = \bar{\lambda}$ pour tout réel λ :

   $$\bar{z} = \overline{\lambda a + c} = \overline{\lambda a} + \bar{c} = \bar{\lambda}\bar{a} + \bar{c} = \lambda\bar{a} + \bar{c}$$

   $$\bar{u} = \lambda\bar{b} + \bar{d}$$

     alors

   $$\lambda M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} z & iu \\ i\bar{u} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$$

     $\mathcal{M}$ est stable par combinaison linéaire.

   On en déduit que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$, on peut écrire

   $$M = \begin{pmatrix} Re(a) + iIm(a) & -Im(b) + iRe(b) \\ Im(b) + iRe(b) & Re(a) - iIm(a) \end{pmatrix}$$

   $$M = Re(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + Im(a)\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + Re(b)\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + Im(b)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Or $(Re(a), Im(a), Re(b), Im(b)) \in \mathbf{R}^4$ et les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont des éléments de $\mathcal{M}$ ($\mathbf{R}$-espace vectoriel).

   On en déduit que

   $$\mathcal{M} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

   On vérifie que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes : Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{R}^4$,

   $$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & i\gamma - \delta \\ i\gamma + \delta & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$$

   On en déduit que

   $$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + i\beta = 0 \\ \delta + i\gamma = 0 \end{cases}$$

Et par unicité des parties réelles et imaginaires d'un complexe, on a :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 = \beta = \gamma = \delta$$

alors les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathcal{M}$ et donc

$\boxed{\mathcal{M} \text{ est de dimension 4.}}$

3. Par calculs directs, en notant $M_1 = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} c & id \\ i\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix}$, on trouve (avec les règles sur la conjugaison des nombres complexes)

$$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} z & iu \\ i\bar{u} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \quad \text{avec} \quad z = ac - b\bar{d}, \quad u = ad + b\bar{c}$$

question 1.2

Soient M_1 et M_2 deux matrices appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{M}$; soit $\langle M_1, M_2 \rangle = \frac{1}{2} Tr\left(\overline{M_1}.M_2^T\right)$.

- D'après les définitions données, $\overline{M_1} \in \mathcal{M}$ et $M_2^T \in \mathcal{M}$, on en déduit que $\overline{M_1}.M_2^T \in \mathcal{M}$ (question précédente), alors il existe $(z,u) \in \mathbf{C}^2$ tels que

$$\overline{M_1}.M_2^T = \begin{pmatrix} z & iu \\ i\bar{u} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\langle M_1, M_2 \rangle = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = Re(z) \in \mathbf{R}$$

L'application $\varphi : (M_1, M_2) \mapsto \langle M_1, M_2 \rangle$ est donc définie sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ et est à valeurs dans $\mathbf{R}$.

- Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et soit $(M_1, M_2, M_3) \in \mathcal{M}^3$, d'après les définitions données, et puisque $\lambda = \bar{\lambda}$ pour tout réel λ, on aura $\overline{\lambda M_1 + M_2}.M_3^T = \lambda \overline{M_1}.M_3^T + \overline{M_2}.M_3^T$, alors par linéarité de l'application Trace, on obtient :

$$\langle \lambda M_1 + M_2, M_3 \rangle = \lambda \langle M_1, M_3 \rangle + \langle M_2, M_3 \rangle$$

L'application φ, définie précédemment, est donc linéaire à gauche.

- En notant $M_1 = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} c & id \\ i\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix}$, on obtient $\overline{M_1}.M_2^T = \begin{pmatrix} z & iu \\ i\bar{u} & \bar{z} \end{pmatrix}$ avec $z = \bar{a}c + \bar{b}d$, donc

$$\langle M_1, M_2 \rangle = Re(z) = Re(a)Re(c) + Im(a)Im(c) + Re(b)Re(d) + Im(b)Im(d)$$

cette expression est clairement symétrique en a et c et en b et d, donc

$$\langle M_1, M_2 \rangle = \langle M_2, M_1 \rangle$$

L'application φ est symétrique.
φ est symétrique et linéaire à gauche, elle est donc linéaire à droite et donc est symétrique bilinéaire.

- D'après l'expression précédente, on a

$$\langle M_1, M_1 \rangle = |a|^2 + |b|^2 \geqslant 0$$

L'application φ est donc positive.
De plus la somme de deux réels positifs est nulle si et seulement si ces deux réels sont nuls alors on a immédiatement

$$\langle M_1, M_1 \rangle = 0 \Longrightarrow |a|^2 = 0 = |b|^2 \Longrightarrow |a| = 0 = |b| \Longrightarrow (a, b) = (0, 0) \Longrightarrow M_1 = 0$$

φ est donc définie-positive.

L'application φ est une forme bilinéaire symétrique définie-positive sur $\mathcal{M}$, c'est donc un produit scalaire sur $\mathcal{M}$.

Ainsi $\mathcal{M}$ est un espace euclidien.

Notations et définitions

- Deux matrices M_1 et M_2 de l'espace $\mathcal{M}$ dont le produit scalaire $\langle M_1, M_2 \rangle$ est nul seront dites perpendiculaires.

- Soit $\mathcal{G}$ le sous-ensemble : $\mathcal{G} = \{G \in \mathcal{M}, \quad det(G) = 1\}$
Il est admis que l'ensemble $\mathcal{G}$ est non vide, stable pour le produit des matrices et stable par passage à l'inverse.

- Soit $\mathcal{U}$ le sous-ensemble : $\mathcal{U} = \left\{U \in \mathcal{M}, \quad U + U^T = 0, \quad U^2 = -I\right\}$

- Soit $\mathcal{V}$ le sous-ensemble des matrices symétriques appartenant à l'espace $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{V} = \left\{V \in \mathcal{M}, \quad V = V^T\right\}$$

Il est admis que le sous-ensemble $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$.

2 Première partie

question 2.1 *Propriétés élémentaires de l'espace $\mathcal{M}$*

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ une matrice de l'espace $\mathcal{M}$; par calculs on a immédiatement

$$\boxed{\begin{aligned} M + \overline{M}^T &= (a + \bar{a})I_2 = Tr(M)I_2 \\ M.\overline{M}^T &= (|a|^2 + |b|^2)I_2 = det(M)I_2 \end{aligned}}$$

2. On déduit de ce qui précède que pour $G \in \mathcal{M}$, on a :

$$\boxed{G \in \mathcal{G} \iff det(G) = 1 \iff G.\overline{G}^T = I_2 \iff G^{-1} = \overline{G}^T}$$

3. Soit M une matrice de l'espace $\mathcal{M}$ dont la trace est nulle ($Tr(M) = 0$) ; d'après le résultat de la question 2.1.1, on a immédiatement $M = -\overline{M}^T$.

   On en déduit que

$$M^2 = M.M = M.(-\overline{M}^T) = -M.\overline{M}^T = -det(M)I_2$$

   et donc immédiatement (transposée d'un produit et linéarité de la transposition)

$$(M^T)^2 = (M^2)^T = -det(M)I_2^T = -det(M)I_2$$

question 2.2 *Matrices U*

1. $U \in \mathcal{U} \iff U \in \mathcal{M}$ et $U + U^T = 0$ et $U^2 = -I_2$.

   On pose $U = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, alors

$$U + U^T = 0 \iff \begin{cases} 2a = 0 \\ i(b + \bar{b}) = 0 \\ i(\bar{b} + b) = 0 \\ 2\bar{a} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ Re(b) = 0 \end{cases}$$

   On en déduit que $U = \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{pmatrix}$ avec $y = Im(b) \in \mathbf{R}$.
   Alors il vient

$$U^2 = -I_2 \iff \begin{pmatrix} -y^2 & 0 \\ 0 & -y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \iff y^2 = 1 \iff y \in \{-1, 1\}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

2. • Soit $M = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ une matrice de l'espace $\mathcal{M}$, U est une matrice de l'ensemble $\mathcal{U}$.
   Les matrices de $\mathcal{U}$ sont $U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = -U_1$. Par calculs on a immédiatement

$$M.U_1 = \begin{pmatrix} -ib & a \\ -\bar{a} & i\bar{b} \end{pmatrix} = U_1.\overline{M}$$

   alors $M.U_2 = -MU_1 = -U_1.\overline{M} = U_2.\overline{M}$.

$$\boxed{\text{Pour } M \in \mathcal{M} \text{ et } U \in \mathcal{U}, \text{ on a } M.U = U.\overline{M}.}$$

• On suppose maintenant que $Tr(M) = 0$, alors on sait que $M = -\overline{M}^T$ et puisque toute matrice U de $\mathcal{U}$ est antisymétrique, on a :

$$(MU)^T = U^T.M^T = -U.M^T = -U(-\overline{M}^T)^T = U.\overline{M} = MU$$

La matrice $MU \in \mathcal{M}$ est donc symétrique, donc $\boxed{MU \in \mathcal{V}.}$

U étant à coefficients réels, on peut écrire $\overline{U} = U$ et alors

$$(UM)^T = M^T.U^T = -M^T.U = \overline{M}U = \overline{MU} = \overline{\overline{UM}} = \overline{U}M = UM$$

La matrice $UM \in \mathcal{M}$ est symétrique, donc $\boxed{UM \in \mathcal{V}.}$

question 2.3 *Norme d'une matrice M*

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ une matrice de l'espace $\mathcal{M}$, on a déjà vu

$$\langle M, M\rangle = |a|^2 + |b|^2 = det(M)$$

On en déduit que $\boxed{\|M\| = \sqrt{\langle M, M\rangle} = \sqrt{det(M)}}$

2. Soit M et W deux éléments de $\mathcal{M}$, puisque $MW \in \mathcal{M}$, on aura d'après ce qui précède :

$$\boxed{\|M\|.\|W\| = \sqrt{det(M)}.\sqrt{det(W)} = \sqrt{det(M).det(W)} = \sqrt{det(MW)} = \|MW\|}$$

question 2.4 *Matrices appartenant à $\mathcal{G}$*

1. Procédons par analyse-synthèse.

- Soit $G = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$. Supposons qu'il existe $\theta \in [0, \pi]$ et $M \in \mathcal{M}$ de trace nulle tels que $G = \cos(\theta)I_2 + M$, alors

$$Tr(G) = a + \bar{a} = 2Re(a) = 2\cos(\theta)$$

On en déduit que nécessairement $Re(a) = \cos(\theta)$, d'où l'unicité de θ puisque la fonction cosinus est bijective sur $[0, \pi]$ et par conséquent l'unicité de $M = G - Re(a)I_2 = \begin{pmatrix} iIm(a) & ib \\ i\bar{b} & -iIm(a) \end{pmatrix}$.

- Soit $G = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$. Posons $M = \begin{pmatrix} iIm(a) & ib \\ i\bar{b} & -iIm(a) \end{pmatrix}$, alors $M \in \mathcal{M}$ et $Tr(M) = 0$.

De plus $G \in \mathcal{G}$ alors $det(G) = 1 = |a|^2 + |b|^2$ et donc $Re(a)^2 \leqslant |a|^2 \leqslant 1$, ce qui donne : $Re(a) \in [-1, 1]$. Il existe alors $\theta \in [0, \pi]$, tel que $Re(a) = \cos(\theta)$: $\theta = \text{Arccos}(Re(a))$. On aura alors

$$G = \begin{pmatrix} Re(a) & 0 \\ 0 & Re(a) \end{pmatrix} + M = \cos(\theta)I_2 + M$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On a montré par analyse-synthèse que :}\\ \forall G \in \mathcal{G}, \quad \exists! \theta \in [0, \pi], \quad \exists! M \in \mathcal{M}, tr(M) = 0 \text{ et } G = \cos(\theta) I_2 + M.\end{array}}$$

$$det(M) = Im(a)^2 + |b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - (Re(a))^2 = det(G) - \cos^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$$

On a donc $\boxed{det(M) = 1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta).}$

On a vu en 2.1.3 que pour $M \in \mathcal{M}$ telle que $Tr(M) = 0$, on a $M^2 = -det(M) I_2$, donc $\boxed{M^2 = -\sin^2(\theta) I_2}$

2. Soit $M \in \mathcal{M}$ telle que $M \neq 0$ alors $\|M\| = \sqrt{det(M)} \neq 0$ et $G_1 = \dfrac{1}{\sqrt{det(M}}.M \in \mathcal{M}$; par multiplinéarité du déterminant :

$$det(G_1) = det\left(\frac{1}{\sqrt{det(M)}} M\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2 det(M) = 1$$

.

Autre méthode :

On sait que $\|M\| = \sqrt{det(M)}$ donc $G_1 = \dfrac{M}{\|M\|}$ et $\|G_1\| = 1$, or $\|G_1\| = \sqrt{det(G_1)}$ donc $det(G_1 = 1$.

$\boxed{\text{On a bien } G_1 \in \mathcal{G}.}$

3 Deuxième partie

Dans toute cette partie, G est une matrice donnée du groupe $\mathcal{G}$, de trace nulle ($Tr(G) = 0$) ; étant donnée une matrice W appartenant au sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$, soit $\ell_G(W)$ la matrice définie par la relation suivante :

$$\ell_G(W) = G.W + W.G^T$$

question 3.1 *L'endomorphisme ℓ_G de $\mathcal{V}$*

1. $$V = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \Longleftrightarrow V = V^T \Longleftrightarrow b = \bar{b} \Longleftrightarrow b \in \mathbf{R}$$

   Alors

$$V = Re(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + Im(a) \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } (Re(a), Im(a), b) \in \mathbf{R}^3$$

Les matrices $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$ sont dans $\mathcal{V}$, donc $\mathcal{V} = Vect\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\right)$.
$\mathcal{V}$ est donc un sous-espace vectoriel dont une famille génératrice est $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\right)$.
Cette famille est une sous-famille de la base de $\mathcal{M}$ fournie en question 1.1.2, c'est donc une famille génératrice et libre de $\mathcal{V}$.

$$\boxed{\mathcal{V} \text{ est de dimension 3 et } \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathcal{V}.}$$

2. • Par distributivité du produit matriciel sur l'addition, on montre sans problème de l'application ℓ_G est linéaire.

Notons $Y = \ell_G(W)$ pour $W \in \mathcal{V}$, par linéarité de la transposition et propriété avec le produit on a :

$$Y^T = (GW + WG^T)^T = W^T.G^T + G.W^T = W.G^T + G.W = Y$$

On en déduit que si $W \in \mathcal{V}$ alors $Y = \ell_G(W) \in \mathcal{V}$.

$$\boxed{\ell_G \text{ est donc un endomorphisme de } \mathcal{V}.}$$

• Supposons que ℓ_G soit l'endomorphisme nul, alors $\forall W \in \mathcal{V}, \quad GW + WG^T = 0$.

1ère méthode : en particulier avec $W = I_2$, on aura

$$G + G^T = 0, \qquad \text{avec } Tr(G) = 0 \qquad \text{et } det(G) = 1$$

alors $G \in \mathcal{U}$ et donc $G = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ ou $G = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Mais en prenant alors $W = \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} \in \mathcal{V}$, on aurait

$$\ell_G(W) = \begin{pmatrix}0&2i\\2i&0\end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \ell_G(W) = \begin{pmatrix}0&-2i\\-2i&0\end{pmatrix} \neq 0$$

ce qui est absurde.

2nde méthode : en particulier pour $E_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, en posant $G = \begin{pmatrix}a&ib\\i\bar{b}&\bar{a}\end{pmatrix}$, on aura

$$\ell_G(E_1) = 0 = \begin{pmatrix}a&0\\i\bar{b}&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a&i\bar{b}\\0&0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2a = 0 \\ i\bar{b} = 0 \end{cases} \iff a = 0 = b \iff G = 0$$

Ce qui est absurde puisque $det(G) = 1$.

Par raisonnement par l'absurde, on a montré que $\boxed{\text{l'endomorphisme } \ell_G \text{ n'est pas identiquement nul.}}$

question 3.2 *Propriétés de l'endomorphisme ℓ_G*

1. (a) Soit $W \in \mathcal{V}$

$$\ell_G \circ \ell_G(W) = G.(GW + WG^T) + (GW + WG^T).G^T = G^2W + 2GWG^T + W.(G^T)^2$$

Or $Tr(G) = 0$ et $det(G) = 1$ donc $G^2 = -det(G)I_2 = -I_2$ et $(G^T)^2 = -det(G)I_2 = -I_2$ (question 2.1.3), alors

$$\ell_G \circ \ell_G(W) = -W + 2GW.G^T - W = 2GWG^T - 2W$$

De même

$$2G.\ell_G(W) = 2G^2W + 2GWG^T = -2W + 2GWG^T = \ell_G \circ \ell_G(W)$$

$\boxed{\text{Les endomorphismes } \ell_G \circ \ell_G \text{ et } W \mapsto 2G.\ell_G(W) \text{ sont identiques.}}$

(b) Pour $W \in \mathcal{V}$.

$$\begin{aligned}
\ell_G(G.\ell_G(W)) &= \ell_G\left(\frac{1}{2}\ell_G \circ \ell_G(W)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ell_G^3(W) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ell_G \circ \ell_G\right)\left(\ell_G(W)\right) \\
&= G.\ell_G(\ell_G(W)) \\
&= 2G^2\ell_G(W) \\
\ell_G(G.\ell_G(W)) &= -2\ell_G(W)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\ell_G(G.\ell_G(W)) = -2\ell_G(W)}$$

(c) Par le résultat de 2.3.2, on a :

$$\|G.\ell_G(W)\| = \|G\|.\|\ell_G(W)\| = \sqrt{det(G)}\|\ell_G(W)\| = \|\ \ell_G(W)\|$$

(d) Soit $U \in \mathcal{U}$, donc (question 2.2.2) $GU = U\overline{G}$ et (question 2.1.3 et $G^2 = -I$) on a $G^{-1} = \overline{G}^T = -G$ donc

$$\ell_G(GU) = G^2U + GUG^T = -U + U.\overline{G}G^T = -U + U = 0$$

$\boxed{\text{Pour } U \in \mathcal{U}, \text{ on a donc } \ell_G(GU) = 0.}$

2. Soient V et W dans $\mathcal{V}$. On rappelle que $\ell_G(V) \in \mathcal{V}$ et $\ell_G(W) \in \mathcal{V}$, alors

$$\langle \ell_G(V), W\rangle = \frac{1}{2}Tr\left(\overline{W}.(GV + VG^T)\right)$$

Or $G^{-1} = \overline{G}^T = -G$ donc

$$\langle \ell_G(V), W\rangle = \frac{1}{2}Tr\left(\overline{W}.(-\overline{G}^T V - V\overline{G})\right)$$

Par linéarité de la trace et par trace d'un produit on obtient :

$$\langle \ell_G(V), W\rangle = -\frac{1}{2}Tr\left(\overline{W}.\overline{G}^T V\right) - \frac{1}{2}Tr\left(V\overline{GW}\right) = -\frac{1}{2}Tr\left(\overline{\ell_G(W)}V\right)$$

$$\boxed{\langle \ell_G(V), W\rangle = -\langle V, \ell_G(W)\rangle}$$

3. Pour $W \in \mathcal{V}$, on aura

$$\langle \ell_G(W), G.\ell_G(W)\rangle = -\langle W, \ell_G(G.\ell_G(W))\rangle = -\langle W, -2\ell_G(W)\rangle = 2\langle W, \ell_G(W)\rangle$$

Par le résultat de la question précédente avec $V = W$ et par symétrie du produit scalaire, on a :

$$\langle W, \ell_G(W)\rangle = \langle \ell_G(W), W\rangle = -\langle W, \ell_G(W)\rangle$$

donc $\langle W, \ell_G(W)\rangle = 0$ et donc

$$\boxed{\langle \ell_G(W), G.\ell_G(W)\rangle = 0, \text{ les matrices } \ell_G(W) \text{ et } G.\ell_G(W) \text{ sontdonc perpendiculaires.}}$$

question 3.3 *Une base de l'espace $\mathcal{V}$*

Etant données une matrice V de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ telle que son image par l'endomorphisme ℓ_G soit différente de 0 ($\ell_G(V) \neq 0$), une matrice U de l'ensemble $\mathcal{U}$ (U appartient à $\mathcal{M}$, est antisymétrique, et $U^2 = -I$), soient H_0 le produit des matrices G et U, H_1 l'image de la matrice V par l'application ℓ_G, H_2 le produit des matrices G et H_1 :

$$H_0 = G.U \qquad H_1 = \ell_G(V) \qquad H_2 = G.H_1 = G.\ell_G(V)$$

1. On connait les matrices U de $\mathcal{U}$, il n'y en a que deux et elles vérifient $det(U) = 1$, $U^2 = -I_2$, $U = \overline{U} = -U^T$. On en déduit :

$$\langle U, H_0\rangle = \frac{1}{2}Tr\left(U.(GU)^T\right) = \frac{1}{2}Tr(U.U^T.G^T) = \frac{1}{2}Tr(-I_2G^T) = \frac{-1}{2}Tr(G^T) = \frac{-1}{2}Tr(G) = 0$$

$$\langle U, H_1\rangle = \langle U, \ell_G(V)\rangle = \frac{1}{2}Tr\left(U(GV + VG^T)\right) = \frac{1}{2}Tr(UGV) + \frac{1}{2}Tr(UVG^T)$$

par propriétés sur la trace (avec la transposée, avec le produit) :

$$\langle U, H_1\rangle = \frac{1}{2}Tr((U.G.V)^T) + \frac{1}{2}Tr(V.G^T.U) = \frac{-1}{2}Tr(VG^TU) + \frac{1}{2}Tr(VG^TU) = 0$$

$$\langle U, H_2\rangle = \langle U, G.\ell_G(V)\rangle = \langle U, -V + GVG^T\rangle = -\langle U, V\rangle + \langle U, G.Vt^TG\rangle$$

$$\langle U, H_2\rangle = \frac{-1}{2}Tr(UV) + \frac{1}{2}Tr(U.G.V.G^T) = \frac{-1}{2}Tr(UV) + \frac{1}{2}Tr(G.V.G^T.U)$$

Or $MU = U.\overline{M}$ pour tout $M \in \mathcal{M}$ donc $G^T.U = U.\overline{G}^T = U.G^{-1} = -UG$

$$\langle U, H_2\rangle = \frac{-1}{2}Tr(UV) + \frac{1}{2}Tr(G.V.(-UG)) = \frac{-1}{2}Tr(UV) + \frac{1}{2}Tr(V.U.(-G^2))$$

$$\langle U, H_2\rangle = \frac{-1}{2}Tr(UV) + \frac{1}{2}Tr(VU) = 0$$

$$\boxed{\text{Finalement } \langle U, H_i\rangle = 0 \text{ pour } i \in [\![0,2]\!].}$$

$\langle H_0, H_1\rangle = \langle GU, \ell_G(V)\rangle$, or $GU \in \mathcal{V}$ (question 1.4.2) donc

$$\langle H_0, H_1\rangle = -\langle \ell_G(GU), V\rangle$$

Or $\ell_G(GU) = G^2U + GUG^T = -U + U\overline{G}G^T = -U + \overline{G\overline{G}^T} = -U + U\overline{det(G)I_2} = -U + U = 0$ (question 1.3.1)

$$\langle H_0, H_1\rangle = 0$$

$$\langle H_0, H_2\rangle = \langle GU, G.\ell_G(V)\rangle = \frac{1}{2}\langle GU, \ell_G \circ \ell_G(V)\rangle = -\frac{1}{2}\langle \ell_G(GU), \ell_G(V)\rangle = 0$$

$$\langle H_1, H_2\rangle = \langle \ell_G(V), G.\ell_G(V)\rangle = \frac{1}{2}\langle \ell_G(V), \ell_G^2(V)\rangle = -\frac{1}{2}\langle \ell_G(\ell_G(V)), \ell_G(V)\rangle$$

on en déduit que $\langle H_1, H_2\rangle = 0$.

$$\boxed{\langle H_j, H_k\rangle = 0 \text{ pour } 0 \leqslant j < k \leqslant 2}$$

$$\langle H_0, H_0\rangle = \|H_0\|^2 = \|GU\|^2 = \|G\|^2\|U|^2 = \|U\|^2 = 1$$

$$\langle H_1, H_1\rangle = \|\ell_G(V)\|^2 = \|G.\ell_G(V)\|^2 = \|H_2\|^2$$

Par hypothèse $H_1 \neq 0$ donc $\|H_1\| \neq 0$ et par 3.2.1(c) on a $\|H_2\| = \|H_1\| \neq 0$ donc $H_2 \neq 0$.

On en déduit que la famille (U, H_0, H_1, H_2) est une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul, c'est donc une famille libre de $\mathcal{M}$, mais comme $dim\mathcal{M} = 4$

$$\boxed{(U, H_0, H_1, H_2) \text{ est finalement une base orthogonale de } \mathcal{M}.}$$

2. (a) Les matrices H_0, H_1, H_2 sont dans $\mathcal{V}$: $H_0 = GU \in \mathcal{V}$ par 2.2.2,
$H_1 = \ell_G(V) \in \mathcal{V}$ pour $V \in \mathcal{V}$ et $H_2 = \frac{1}{2}\ell_G \circ \ell_G(V) \in \mathcal{V}$.
(H_0, H_1, H_2) est une sous-famille de la base orthogonale de $\mathcal{M}$ précédente, donc c'est une famille libre et orthogonale de $\mathcal{V}$ or $dim\mathcal{V} = 3$, donc

$$\boxed{(H_0, H_1, H_2) \text{ est une base orthogonale de } \mathcal{V}.}$$

(b) On en déduit que $\left(\frac{H_0}{\|H_0\|}, \frac{H_1}{\|H_1\|}, \frac{H_0}{\|H_0\|}\right) = \left(H_0, \frac{H_1}{\|H_1\|}, \frac{H_2}{\|H_2\|}\right)$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}$.

(c) $\ell_G(H_0) = \ell_G(GU) = 0$ (3.2.1(d)), $\ell_G(H_1) = \ell_G \circ \ell_G(V) = 2G.\ell_G(V) = 2H_2$ (3.2.1(a)), $\ell_G(H_2) = \ell_G(G.\ell_G(V)) = -2\ell_G(V) = -2H_1$ (3.2.1(b)), or $\|H_1\| = \|H_2\|$ (vu en 3.3.1) alors en notant (H_0, H_1', H_2') la base orthonormée $\left(H_0, \frac{H_1}{\|H_1\|}, \frac{H_2}{\|H_2\|}\right)$, on a :

$$\ell_G(H_0) = 0, \quad \ell_G(H_1') = -2H_2', \quad \ell_G(H_2) = 2H_1'$$

$$\boxed{\text{La matrice de } \ell_G \text{ dans la base } (H_0, H_1', H_2') \text{ est donc } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

On aura alors $\frac{1}{2}\ell_G$ est de matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ avec $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

On en déduit que $\frac{1}{2}\ell_G$ **est la composée** $p \circ r$ **avec** p **la projection orthogonale sur** $Vect(H_1', H_2') = \{H_0\}^{\perp}$ **et** r **la rotation d'axe dirigé par** H_0 **et d'angle de mesure** $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

question 3.4 *Un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$*

Soit θ un réel donné appartenant au segment $[0, 2\pi]$; soit M_θ la matrice définie par la relation :

$$M_\theta = I\cos\theta + G\sin\theta$$

Soit s_θ l'application qui, à une matrice W de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$, associe la matrice $M_\theta.W$:

$$s_\theta : W \mapsto M_\theta.W$$

1. G et I sont dans $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel donc $M_\theta \in \mathcal{M}$.

   On a $G = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ avec $Tr(G) = 0$ donc $Re(a) = 0$ donc $G = \begin{pmatrix} ix & ib \\ i\bar{b} & -ix \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbf{R}$ et $det(G) = 1 = x^2 + |b|^2$.

   On a donc $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) + ix\sin(\theta) & ib \\ i\bar{b} & \cos(\theta) - ix\sin(\theta) \end{pmatrix}$ et

   $$det(M_\theta) = \cos^2(\theta)x^2 + x^2\sin^2(\theta) + |b|^2 = x^2 + |b|^2 = 1$$

   $$\boxed{\text{La matrice } M_\theta \text{ est donc dans } \mathcal{G}.}$$

2. $s_\theta(U) = M_\theta.U = \cos(\theta)U + \sin(\theta)GU = \cos(\theta)U + \sin(\theta)H_0$.

   $s_\theta(H_0) = M_\theta.H_0 = \cos(\theta)H_0 + \sin(\theta)G^2U = \cos(\theta)H_0 - \sin(\theta)U$.

   $s_\theta(H_1) = M_\theta.H_1 = \cos(\theta)H_1 + \sin(\theta)H_2$.

   $s_\theta(H_2) = M_\theta.H_2 = \cos(\theta)H_2 + \sin(\theta)G^2H_1 = \cos(\theta)H_2 - \sin(\theta)H_1$.

   On en déduit que la matrice de s_θ dans la base (U, H_0, H_1, H_2) est

   $$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$