PSI - Samedi 11 janvier 2025 - Sujet B CCINP - 4 heures

Calculatrices autorisées

Problème 01 : Extrait de CCINP PSI 2011

Notations.

Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}^*$. On note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes, $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes. $O(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que toute matrice de $S_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice diagonale avec une matrice de passage orthogonale.

On rappelle que $S_n^+ = \left\{A \in S_n(\mathbb{R}), \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^T.A.X \geqslant 0\right\}$ et
$S_n^{++} = \left\{A \in S_n(\mathbb{R}), \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X \neq 0 \Longrightarrow X^T.A.X > 0\right\}$.

On note $\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans cet ordre. L'écriture $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A. On note A^T la matrice transposée de A et $\operatorname{tr}(A)$ la trace de la matrice carrée A.

Dans tout le problème, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Le produit scalaire de deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ est noté $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|x\|$ désigne la norme du vecteur x. Soient X et Y les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des composantes de x et y dans $\mathcal{B}$, le produit $X^T Y$ appartient à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et son unique coefficient est $(x|y)$. On écrira $(x|y) = X^T Y$ qui est le produit scalaire canonique des matrices X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

I- Racine carrée d'une matrice de S_n^+.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres réelles de S comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ **une base orthonormée** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de S avec $\forall i \in [\![1,n]\!],\ SX_i = \lambda_i X_i$.

I.1. *On va montrer que* $S \in S_n^+$ *si et seulement si* $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \geq 0$.

I.1.1. On suppose que $S \in S_n^+$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $SX_i = \lambda_i$ alors $X_i^T.S.X_i = \lambda_i X_i^T.X_i$ et par hypothèse $X_i^T.X_i = (X_i|X_i) = \|X_i\|^2 = 1$ donc $X_i^T.S.X_i = \lambda_i \geqslant 0$.

$$\boxed{S \in S_n^+ \Longrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \lambda_i \geqslant 0.}$$

I.1.2. On suppose que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i \geqslant 0$.
Par décomposition dans la base $(X_1, \ldots, X_n)$, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

tel que $X=\sum_{i=1}^{n} x_i X_i$ et

$$X^T.S.X = X^T.\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i X_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j\lambda_i x_i X_j^T.X_i$$

Or $X_j^T.X_i = (X_j|X_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i\neq j\end{cases}$ donc

$$X^T.S.X = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j^2 \geqslant 0 \text{ par somme de produits de réels positifs}$$

$\boxed{\text{On a donc } \forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i\geqslant 0 \Longrightarrow \forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\quad X^T.S.X\geqslant 0.\ S \text{ est dans } S_n^+.}$

On montre de même, et on admettra, qu'une matrice $S\in S_n(\mathbb{R})$ appartient à S_n^{++} si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

I.1.3. On suppose que $S\in S_n^{++}$ et donc que $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i>0$.

• On sait que S est diagonalisable, alors on sait que χ_S son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et $det(S)=\prod_{\lambda\in Sp(S)}\lambda=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i>0$. $\boxed{S \text{ est donc inversible}}$

• <u>*1ère rédaction :*</u>

Par hypothèse $\forall i\in[\![1,n]\!]\quad S.X_i=\lambda_i X_i$ donc $X_i=\lambda_i.S^{-1}X_i$ ou encore $S^{-1}X_i=\dfrac{1}{\lambda_i}X_i$. $(X_1,\dots,X_n)$, base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est donc formée de vecteurs propres de S^{-1}. Les valeurs propres de S^{-1} sont donc les réels $\dfrac{1}{\lambda_1},\dots,\dfrac{1}{\lambda_n}$ qui sont des réels strictement positifs.

De plus $\left(S^{-1}\right)^T=\left(S^T\right)^{-1}=S^{-1}$, donc S^{-1} est dans S_n.

<u>*2nde rédaction :*</u>

$S\in S_n^{++}$ alors par le théorème spectral, il existe $U\in O(n)$ telle que $S=U.\text{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n).U^{-1}$ et $U^{-1}=U^T$ alors par inverse d'un produit de matrices inversibles on a :

$$S^{-1}=(U^{-1})^{-1}.\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\dots,\frac{1}{\lambda_n}\right).U^{-1}=U.\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\dots,\frac{1}{\lambda_n}\right).U^T$$

On en déduit que

$$\left(S^{-1}\right)^T=\left(U^T\right)^T.\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\dots,\frac{1}{\lambda_n}\right)^T.U^T=U.\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\dots,\frac{1}{\lambda_n}\right).U^T=S^{-1}$$

donc $S^{-1}\in S_n$ et $Sp(S^{-1})=\left\{\dfrac{1}{\lambda_1},\dots,\dfrac{1}{\lambda_n}\right\}\subset]0,+\infty[$.

Finalement $\boxed{S^{-1}\in S_n^{++}.}$

I.2. On suppose que $S\in S_n^+$.

I.2.1. Soient $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Par produit de deux matrices diagonales on a directement

$$\Delta^2 = \mathrm{diag}(\left(\sqrt{\lambda_1}\right)^2, \ldots, \left(\sqrt{\lambda_n}\right)^2) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = D$$

On suppose que $N \in S_n^+$ vérifie $N^2 = D$. On note $(C_1, \ldots, C_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soient $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i C_i$ et $\mu \in \mathbb{R}^+$ tels que $NY = \mu Y$.

On a

$$N^2 Y = N(NY) = \mu NY = \mu^2 Y = \sum_{i=1}^{n} \mu^2 y_i C_i$$

et

$$N^2 Y = D.Y = \sum_{i=1}^{n} y_i D C_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \lambda_i C_i$$

Par unicité des coordonnées dans la base $(C_1, \ldots, C_n)$ on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \mu^2 y_i = \lambda_i y_i$$

<u>1ère rédaction :</u>
En multipliant par le réel y_i on a : $\mu^2 y_i^2 = \lambda_i y_i^2$. Puisque $\mu \in \mathbb{R}^+$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ en passant à la racine carrée il vient $\mu|y_i| = \sqrt{\lambda_i}|y_i|$. On aura donc $\mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i$ ou $-\mu y_i = -\sqrt{\lambda_i} y_i$ finalement on a toujours $\mu y_i = \sqrt{\lambda_i}.y_i$.

<u>2nde rédaction :</u>

Si $y_i = 0$ alors $\mu y_i = \lambda_i y_i$.
Si $y_i \neq 0$ alors $\mu^2 y_i = \lambda_i y_i \Longrightarrow \mu^2 = \lambda_i$ or $\mu \geqslant 0$ et $\lambda_i \geqslant 0$ donc $\mu = \sqrt{\lambda_i}$ et en multipliant par y_i : $\mu y_i = \sqrt{\lambda_i}.y_i$.

$$\boxed{\text{On a donc obtenu } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mu y_i = \sqrt{\lambda_i} y_i.}$$

Le résultat précédent donne $NY = \mu Y \Longrightarrow NY = \mu Y = \Delta Y$.

$N \in S_n^+$, donc par le théorème spectral il existe $(Y_1, \ldots, Y_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de N associés aux valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de N.
On a alors $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad NY_i = \mu_i Y_i = \Delta Y_i$.
Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i Y_i$ alors

$$NY = \sum_{i=1}^{n} y_i N Y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta Y_i = \Delta Y$$

En prenant en particulier Y égal successivement à $C_1, \ldots, C_n$, on obtient

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad NC_i = \Delta C_i$$

ce qui donne que la colonne i de N est égale à la colonne i de Δ. Par conséquent $\boxed{N = \Delta.}$

I.2.2. Soit $U \in O(n)$ telle que $S = UDU^T$.

• On peut écrire $S = U.\Delta^2.U^T$, avec Δ la matrice introduite dans la question précédente. Puisque $U^T.U = I_n$, on a

$$S = U.\Delta.\Delta.U^T = U.\Delta.U^T.U.\Delta.U^T \left(U.\Delta.U^T\right)\left(U.\Delta.U^T\right)$$

En posant $T = U.\Delta.U^T$, on a $T^2 = S$.

$$T^T = \left(U.\Delta.U^T\right)^T = U.\Delta^T.U^T = U.\Delta.U^T = T$$

donc $T \in S_n$ et T est semblable à Δ donc les valeurs propres de T sont les réels positifs $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ donc $T \in S_n^+$.

$$\boxed{\text{La matrice } T = U.\Delta.U^T \text{ est dans } S_n^+ \text{ et vérifie } T^2 = S.}$$

• Supposons qu'il existe une matrice $H \in S_n^+$ telle que $H^2 = S = U.D.U^T$ alors
$U^T.H^2.U = D$.
Notons $N = U^T.H.U$, on aura

$$N^T = \left(U^T.H.U\right)^T = U^T.H^T.U = U^T.H.U = N$$

donc $N \in S_n$.
N et H sont semblables puisque $U^T = U^{-1}$. N et H ont donc les même valeurs propres qui sont positives puisque $H \in S_n^+$. On a donc $N \in S_n^+$ et $N^2 = U^T.H^2.U = D$.
Par la question précédente, on sait que $N = \Delta$, donc $H = U.N.U^T = U.\Delta.U^T = T$.

$$\boxed{\text{La matrice } T \in S_n^+ \text{ telle que } T^2 = S \text{ est bien unique.}}$$

On notera $T = \sqrt{S}$ l'unique matrice $T \in S_n^+$ telle que $T^2 = S$.
Ce qui donne $T = \sqrt{S} = U.\Delta.U^T$ avec $S = U.D.U^T$, $U \in O(n)$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$.

I.3. *Une détermination de* $\sqrt{S}$. On suppose que $S \in S_n^+$ et que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S. On note $0 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p$ les valeurs propres **distinctes** de S. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on définit les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $\mu_1, \ldots, \mu_p$ par :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ \forall a \in \mathbb{R},\ L_k(a) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{a - \mu_j}{\mu_k - \mu_j}$$

I.3.1. <u>*1ère rédaction :*</u> Pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$L_k(S).X_i = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{S - \mu_j I_n}{\mu_k - \mu_j}\right) X_i = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{1}{\mu_k - \mu_j}\right) . \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} (S - \mu_j I_n)\right) X_i$$

$(S - \mu_p I_n)X_i = SX_i - \mu_p X_i = \lambda_i X_i - \mu_p X_i = (\lambda_i - \mu_p)X_i$, alors

$$(S - \mu_{p-1} I_n)(S - \mu_p I_n)X_i = (\lambda_i - \mu_p)(S - \mu_{p-1} I_n)X_i = (\lambda_i - \mu_p)(\lambda_i - \mu_{p-1})X_i$$

et par récurrence on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
L_k(S).X_i &= \left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{p}\frac{1}{\mu_k-\mu_j}\right)\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{p}(\lambda_i-\mu_j)\right)X_i\\
&= \left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{p}\frac{\lambda_i-\mu_j}{\mu_k-\mu_j}\right)X_i\\
L_k(S).X_i &= = L_k(\lambda_i).X_i
\end{aligned}$$

<u>*2nde rédaction :*</u> Pour $i \in [\![1,n]\!]$, L_k est un polynôme de degré $p-1$ donc il existe des réels $a_0,\dots,a_{p-1}$ tels que $L_k = \sum_{j=0}^{p-1} a_j X^j$, alors $L_k(S) = \sum_{j=0}^{p-1} a_j S^j$. Puisque $SX_i = \lambda_i X_i$, par récurrence on a : $\forall j \in \mathbb{N} \quad S^j X_i = \lambda_i^j X_i$ alors

$$L_k(S).X_i = \sum_{j=0}^{p-1}(a_j S^j X_i) = \sum_{j=0}^{p-1} a_j\lambda_i^j X_i = \left(\sum_{j=0}^{p-1} a_j\lambda_i^j\right)X_i = L_k(\lambda_i)X_i$$

- Si $\mu_k = \lambda_i$ alors $L_k(\lambda_i) = 1$.
- Si $\mu_k \neq \lambda_i$ alors il existe $j_0 \in [\![1,p]\!]$ avec $j_0 \neq k$ tel que $\mu_{j_0} = \lambda_i$ et donc $L_k(\lambda_i) = 0$.

On en déduit que : $\boxed{L_k(S).X_i = \begin{cases} X_i & \text{si } \mu_k = \lambda_i \\ 0 & \text{si } \mu_k \neq \lambda_i \end{cases} = \delta_{\mu_k,\lambda_i} X_i}$

I.3.2. Soit P le polynôme de degré $\leqslant p-1$, à coefficients réels tel que $\forall k \in [\![1,p]\!],\ P(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}$.

Par propriété sur les polynômes interpolateurs de Lagrange, on sait que $(L_1,\dots,L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ et que $P = \sum_{k=1}^{p} P(\mu_k)L_k$, donc $\boxed{P = \sum_{k=1}^{p}\sqrt{\mu_k}L_k.}$

Pour $i \in [\![1,n]\!] \quad \exists! k \in [\![1,p]\!] \quad \lambda_i = \mu_k$, alors, en utilisant la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\mu_k}L_k(S)X_i = \sqrt{\lambda_i}X_i + \sum_{\substack{k=1\\\mu_k\neq\lambda_i}}^{p}\sqrt{\mu_k}L_k(S)X_i = \sqrt{\lambda_i}X_i + 0$$

donc $\boxed{P(S)X_i = \sum_{k=1}^{p}\sqrt{\mu_k}.L_k(S)X_i = \sqrt{\lambda_i}X_i.}$

On en déduit que $(X_1,\dots,X_n)$, base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est formée de vecteurs propres de $P(S)$ associés aux valeurs propres $\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n}$.

$P(S)$ est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont positives.

Notons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ on a

$$(P(S))^T = \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k S^k\right)^T = \sum_{k=0}^{p-1} a_k (S^k)^T = \sum_{k=0}^{p-1} a_k (S^T)^k = \sum_{k=0}^{p-1} a_k S^k = P(S)$$

On en déduit que $\boxed{P(S) \in S_n^+.}$

De plus

$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad (P(S))^2 X_i = P(S). (P(S)X_i) = P(S). \left(\sqrt{\lambda_i} X_i\right) = \sqrt{\lambda_i} P(S) X_i = \lambda_i X_i = SX_i$

Puisque $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on montre (comme en en I.2.1) : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad (P(S))^2 X = SX$ et finalement $(P(S))^2 = S$.

Puisque $P(S) \in S_n^+$ et $(P(S))^2 = S$ le résultat de I.2.2 donne $\boxed{P(S) = \sqrt{S}.}$

I.3.3. On prend $S = \begin{pmatrix} ccc7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Il est clair que $S \in S_3$.

Cherchons le polynôme caractéristique de S pour avoir les valeurs propres de S :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \quad \chi_S(x) &= det(xI_3 - S) \\
&= \begin{vmatrix} x-7 & -2 & 2 \\ -2 & x-4 & 1 \\ 2 & 1 & x-4 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{on effectue } L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&= \begin{vmatrix} x-7 & -2 & 2 \\ -2 & x-4 & 1 \\ 0 & x-3 & x-3 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{on effectue } C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\
&= \begin{vmatrix} x-7 & -4 & 2 \\ -2 & x-5 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{par développement par rapport à } L_3 \\
&= (-1)^{3+3}(x-3) \begin{vmatrix} x-7 & -4 \\ -2 & x-5 \end{vmatrix} \\
&= (x-3)\left((x-7)(x-5) - 8\right) \\
&= (x-3)(x^2 - 12x + 27) \\
\forall x \in \mathbb{R} \quad \chi_S(x) &= (x-3)^2(x-9)
\end{aligned}$$

On pouvait utiliser sa calculatrice pour trouver les racines de ce polynôme.
Avec les notations de I.3, on a : $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 9$ et d'après le résultat de la question précédente :

$$\sqrt{S} = P(S) = \sqrt{3}L_1(S) + 3L_2(S) = \sqrt{3}\frac{S - 9I_3}{3-9} + 3\frac{S-3I_3}{9-3}$$

$$\boxed{\text{On a donc } \sqrt{S} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}S + \frac{3}{2}(\sqrt{3}-3)I_3}$$

II - Des inégalités remarquables.

Soit $S \in S_n^{++}$ et soit $T \in S_n^{++}$ telles que $T^2 = S$. On note s et t les automorphismes de $\mathbb{R}^n$ de matrices S et T relativement à la base orthonormée $\mathcal{B}$. Soient s^{-1} et t^{-1} les applications réciproques de s et t. On note $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les n valeurs propres de s.

II.1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.
t est de matrice T dans une base orthonormée et $T \in S_n$ donc t est un endomorphisme autoadjoint, de même pour s qui est de matrice S, pour t^{-1} qui est de matrice T^{-1} et pour s^{-1} qui est de matrice S^{-1} (voir I.1.3).

Par inégalité de Cauchy Schwarz on sait que :

$$(t(x)|t^{-1}(x))^2 \leqslant (t(x)|t(x)).(t^{-1}(x)|t^{-1}(x))$$

Or $(t^{-1}(x)|t^{-1}(x)) = ((t^{-1})^2(x)|x) = ((t^2)^{-1}(x)|x) = (s^{-1}(x)|x)$ et

$(t(x)|t(x)) = (t^2(x)|x) = (s(x)|x)$, donc finalement $\boxed{(t(x)|t^{-1}(x))^2 \leqslant (s(x)|x).(s^{-1}(x)|x) \quad (1).}$

Puisque t est bijectif, le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned}(t(x)|t^{-1}(x))^2 = (s(x)|x).(s^{-1}(x)|x) &\iff t^{-1}(x) = 0 \text{ ou } \exists\lambda \in \mathbb{R} \quad t(x) = \lambda t^{-1}(x)\\ &\iff x = 0 \text{ ou } \exists\lambda \in \mathbb{R} \quad t^2(x) = \lambda x\\ &\iff x = 0 \text{ ou } \exists\lambda \in \mathbb{R} \quad s(x) = \lambda x\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il y a donc égalité dans (1) si et seulement si } x \text{ est un vecteur propre de } s \text{ ou le vecteur nul.}}$$

II.2. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall a \in \mathbb{R},\ P(a) = a^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)a + \lambda_1\lambda_n$$

On remarque que $\forall a \in \mathbb{R} \quad P(a) = (a-\lambda_1)(a-\lambda_n)$ (*on doit savoir, programme première année, que $X^2 - sX + p$, avec $s = \lambda + \mu$ et $p = \lambda.\mu$, est de racines λ et μ, au pire on calcule le discriminant pour retrouver ces racines mais c'est une vraie perte de temps.* Puisque $\lambda_1 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_n$ on a :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!] \quad P(\lambda_i) = (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_n) \leqslant 0.}$$

Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $v = -P(s)\circ s^{-1}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tel que $s(x) = \lambda_i x$. On a

$$P(s) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)s + \lambda_1\lambda_n Id$$

donc

$$v = -\left(s - (\lambda_1 + \lambda_n)Id - \lambda_1\lambda_n s^{-1}\right)$$

$s(x) = \lambda_i x$ donc $s^{-1}(x) = \dfrac{1}{\lambda_i}x$ et

$$v(x) = -\left(\lambda_i x - (\lambda_1 + \lambda_n)\lambda_i x + \lambda_1\lambda_n.\frac{1}{\lambda i}x\right) = -\frac{1}{\lambda_i}\left(\lambda_i^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)\lambda_i + \lambda_1\lambda_n\right)x$$

donc $\boxed{v(x) = -\dfrac{P(\lambda_i)}{\lambda_i}x}$ et puisque $x \neq 0$,

$$\boxed{x \text{ est un vecteur propre de } v \text{ associé à la valeur propre } -\frac{P(\lambda_i)}{\lambda_i}.}$$

s est un endomorphisme autoadjoint alors par le théorème spectral il existe une base orthonormée $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de s associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Cette base est aussi une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de v, la matrice de v dans la base $(x_1, \dots, x_n)$ est donc diagonale de coefficients diagonaux les réels $\beta_i = -\dfrac{P(\lambda_i)}{\lambda_i} \geqslant 0$ avec $i \in [\![1, n]\!]$.

En notant U la matrice de passage de la base orthonormée $\mathcal{B}$ à la base orthonormée $(x_1, \dots, x_n)$, la matrice V de v dans la base $\mathcal{B}$ vérifie : $V = U.\text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n).U^T$, donc $V^T = V$ et $Sp(V) \subset \mathbb{R}^+$. $\boxed{\text{On en déduit que } V \in S_n^+.}$

II.3. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. On considère le polynôme Q défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ Q(a) = (s(x)|x)\,a^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)\|x\|^2 a + \left(s^{-1}(x)|x\right)\lambda_1\lambda_n$$

s^{-1} est un endomorphisme autoadjoint strictement positif (ses valeurs propres sont strictement positives) donc $(s^{-1}(x)|x) > 0$. On a donc :

$$Q(0) = (s^{-1}(x)|x)\lambda_1\lambda_n > 0$$

$$Q(1) = (s(x)|x) - (\lambda_1 + \lambda_n)\,(x|x) + \left(s^{-1}(x)|x\right)\lambda_1\lambda_n$$

Par bilinéarité du produit scalaire

$$Q(1) = \left(s(x) - (\lambda_1 + \lambda_n)x + \lambda_1\lambda_n s^{-1}(x)|x\right) = (-v(x)|x) = -\,(v(x)|x)$$

Puisque $V \in S_n^+$, on sait que $(v(x)|x) \geqslant 0$ et donc $Q(1) \leqslant 0$.

$Q(0) > 0$ et $Q(1) \leqslant 0$ alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que Q s'annule sur $]0, 1]$, donc son discriminant est positif, ce qui donne :

$$(\lambda_1 + \lambda_n)^2\|x\|^4 - 4\,(s(x)|x)\,.\left(s^{-1}(x)|x\right)\lambda_1\lambda_n \geqslant 0$$

Puisque $\lambda_1\lambda_n > 0$, on peut écrire : $\boxed{(s(x)|x)\left(s^{-1}(x)|x\right) \leqslant \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|x\|^4 \quad (2)}$

II.4. On suppose que $\lambda_1 < \lambda_n$. Soient v_1 et v_n des vecteurs de norme 1 tels que $s(v_1) = \lambda_1 v_1$ et $s(v_n) = \lambda_n v_n$. Soit $x = v_1 + v_n$.

On aura donc $s(x) = \lambda_1 v_1 + \lambda_n v_n$ et $s^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda_1}v_1 + \frac{1}{\lambda_n}v_n$.

Les vecteurs v_1 et v_n sont orthogonaux puisque ce sont des vecteurs propres d'un endomorphisme autoadjoint associés à des valeurs propres distinctes, et puisqu'ils sont normés on a :

$$(s(x)|x) = \lambda_1 + \lambda_n \qquad \left(s^{-1}(x)|x\right) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_n} = \frac{\lambda_n + \lambda_1}{\lambda_1\lambda_n}$$

On a aussi $\|x\|^2 = 2$, donc

$$(s(x)|x)\left(s^{-1}(x)|x\right) = \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{\lambda_1\lambda_n} = \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|x\|^4$$

$\boxed{\text{Le vecteur } x = v_1 + v_n \text{ vérifie l'égalité dans l'inégalité (2).}}$

Problème 02 : Extrait de CCINP PC 2019

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1. Soit P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, par produit de fonctions continues, la fonction $f : t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Par croissances comparées, on sait que $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha e^{-t} = 0$, alors par combinaison linéaire de limites nulles on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 P(t)Q(t)e^{-t} = 0$, donc $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. D'après les intégrales de Riemann on sait que $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, alors par comparaison f est aussi intégrable en $+\infty$ et donc $\boxed{(P|Q) \text{ est convergente.}}$

2. Notons φ l'application $(.|.) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$.
   • Le résultat précédent permet de justifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   • Par linéarité de l'intégrale, puisqu'il y a convergence de toutes les intégrales, on a :
   $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall (P, Q, R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$, $(\lambda P + Q|R) = \lambda\,(P|R) + (Q|R)$. L'application φ est donc linéaire

par rapport à sa première variable.

• Par commutativité dans $\mathbb{R}$, on a $(P|Q) = (Q|P)$. φ est donc symétrique et finalement est bilinéaire.

• Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $t \mapsto P^2(t)e^p{-}t$ est intégrable, continue et positive sur $[0,+\infty[$ alors $(P|P) \geqslant 0$ et

$$(P|P) = 0 \Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad P^2(t)e^{-t} = 0 \Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad P^2(t) = 0 \Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad P(t) = 0$$

Le polynôme P admettant une infinité de racines distinctes, $P = 0$.
On a donc $(P|P) = 0 \Longrightarrow P = 0$.
φ est donc définie-positive.

$$\boxed{\text{L'application } (.|.) \text{ est donc un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$$

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Les fonctions $u : t \mapsto t^k$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ avec $u'(t) = kt^{k-1}$ et $v'(t) = e^{-t}$. Par croissances comparées $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0 \in \mathbb{R}$ alors par intégration par parties, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \left(X^k|1\right)$ converge (I.1.1), on sait que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&\quad \text{or } u(0) = 0 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0 \\
\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt &= k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

4. • Par définition $\left(X^0|1\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$.

• Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $\left(X^{k-1}|1\right) = (k-1)!$.

Par le résultat de la question précédente :

$$\left(X^k|1\right) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\mathrm{d}t = \left(X^{k-1}|1\right) = k.(k-1)! = k!$$

$$\boxed{\text{On a obtenu par récurrence : } \forall k \in [\![0,n]\!] \quad \left(X^k|1\right) = k!.}$$

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

5. Par linéarité de la dérivation, on montre que α est une application linéaire.

   Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\alpha(P) \in \mathbb{R}[X]$, $deg(P') \leqslant n-1$ et $deg(P'') \leqslant n-2$ donc $deg(XP'') \leqslant n-1$ et $deg((1-X)P') \leqslant n$, par somme $deg(\alpha(P)) \leqslant n$.

   $\boxed{\alpha \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

6. $\alpha(1) = 0$, $\alpha(X) = (1-X)$ et pour $k \geqslant 2$

$$\begin{aligned}\alpha(X^k) &= k(k-1)X.X^{k-2} + (1-X)kX^{k-1}\\ &= k(k-1)X^{k-1} + kX^{k-1} - kX^k\end{aligned}$$

$$\alpha(X^k) = -kX^k + k^2X^{k-1}$$

   On en déduit que la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ est

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

7. La matrice T_α est triangulaire, alors le polynôme caractéristique de T_α et donc de α est donné par $\chi_\alpha(x) = det(xI_{n+1} - T_\alpha) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)$. Ce polynôme est scindé à racines simples donc α est diagonalisable et $\lambda \in \mathrm{Sp}(\alpha) \iff \chi_\alpha(\lambda) = 0$ donc $\boxed{\alpha \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k | k \in [\![0, n]\!]\}.}$

II.Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

8. On a vu que $(-k)$ est une racine simple (ordre de multiplicité égal à 1) du polynôme caractéristique de α, donc

   $\boxed{\mathrm{Ker}(\alpha + kId_{\mathbb{R}_n[X]}) \text{ est de dimension } 1.}$

9. $\mathrm{Ker}(\alpha + kId_{\mathbb{R}_n[X]})$ est de dimension 1 alors il existe $Q_k \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que $\mathrm{Ker}(\alpha + kId_{\mathbb{R}_n[X]}) = Vect(Q_k) = \{\beta Q_k, \quad \beta \in \mathbb{R}\}$. On en déduit que le seul polynôme de $Vect(Q_k)$ de coefficient dominant égal à 1 est $P = \dfrac{1}{a_k}Q_k$ avec a_k le coefficient dominant de Q_k.

   $\boxed{\text{Il existe donc un unique polynôme } P_k \in \mathbb{R}_n[X] \text{, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant } \alpha(P_k) = -kP_k}$

10. En notant d le degré de P_k, il existe des réels $a_0, \dots, a_{d-1}$ tels que $P_k = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$. Par linéarité

$$\alpha(P) = \alpha(X^d) + \sum_{i=0}^{d} a_i \alpha(X^i) = -dX^d + d^2 X^{d-1} + \sum_{i=1}^{d-1} a_i \left(-iX^i + i^2 X^{i-1}\right) = -kP_k = -kX^d - \sum_{i=0}^{d-1} k a_i X^i$$

Par égalité des coefficients dominants on a immédiatement $d = k$.

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P_k \text{ est de degré } k.}$$

11. P_0 est de coefficient dominant égal à 1 et est de degré 0 alors $P_0 = 1$.

On sait qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P_1 = X + a$ alors $-P_1 = \alpha(P_1) = \alpha(X) + a\alpha(1) = 1 - X$ donc $P_1 = X - 1$.

$X^2 - 4X + 2$ est de coefficient dominant égal à 1 et

$$\begin{array}{rcl} \alpha(X^2 - 4X + 2) & = & \alpha(X^2) - 4\alpha(X) + 2\alpha(1) \\ & = & -2X^2 + 4X - 4(1 - X) + 2 \times 0 \\ & = & -2X^2 + 4X - 4 \\ \alpha(X^2 - 4X + 2) & = & -2(X^2 - 4X + 2) \end{array}$$

alors par unicité on a : $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. Par définition :

$$\begin{array}{rcl} (\alpha(P)|Q) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(tP''(t) + (1 - t)P'(t)\right) Q(t) e^{-t} \mathrm{d}t \\ & & \text{par linéarité puisque les intégrales convergent} \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(tP''(t) + P'(t)\right) Q(t) e^{-t} \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} tP'(t) Q(t) e^{-t} \mathrm{d}t \end{array}$$

Les fonctions $u : t \mapsto tP'(t)$ et $v : t \mapsto Q(t)e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, avec par croissances comparées $\lim_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$, $u(0) = 0$, $u'(t) = tP''(t) + P'(t)$ et $v'(t) = Q'(t)e^{-t} - Q(t)e^{-t}$, alors par intégration par parties, on a :

$$\begin{array}{rcl} (\alpha(P)|Q) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t} \mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle[u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t} \mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle -\int_0^{+\infty} tP'(t) \left(Q'(t) - Q(t)\right) e^{-t} \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t} \mathrm{d}t \\ (\alpha(P)|Q) & = & \displaystyle -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} \mathrm{d}t \end{array}$$

Remarque :

On pouvait aussi traiter la question en faisant plutôt une intégration par parties sur $\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ en posant $u(t) = P(t)$ et $v(t) = tQ'(t)e^{-t}$ si on ne voyait pas comment s'y prendre sur $(\alpha(P)|Q)$.

13. On déduit de l'égalité précédente et de la symétrie du produit scalaire que :

$$(\alpha(P)|Q) = \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)e^{-t}\mathrm{d}t = (\alpha(Q)|P) = (P|\alpha(Q))$$

$\boxed{\alpha \text{ est donc un endomorphisme autoadjoint.}}$

14. Par la question 9, $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille de $n+1$ vecteurs propres de α associés à des valeurs propres distinctes de α et par la question 13 α est un endomorphisme autoadjoint, alors on sait que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul. cette famille de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc libre et puisqu'elle contient $n+1$ vecteurs avec $n+1 = dim\mathbb{R}_n[X]$,

$\boxed{(P_0, \ldots, P_n) \text{ est finalement une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X].}$

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \ldots, x_n$.
On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

15. • S'il existe un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie $(*)$ alors on aura en particulier pour les polynômes $1, X, \ldots, X^{n-1}$:

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k$$

Et par le résultat de la question I.2.4 on a : $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad k! = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k$, ce qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

• Réciproquement, on suppose qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \mathrm{d}t = k! = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, et par linéarité puisque les intégrales convergent :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_k \lambda_i x_i^k \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i a_k x_i^k \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_i^k \right) \\
\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i
\end{aligned}$$

Par double implication on a montré :

$$\boxed{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \text{ vérifie } (*) \text{ si et seulement si : } \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.}$$

16. Les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont distincts, alors la matrice de Vandermonde $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible et donc le système linéaire $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$ admet une et une seule solution $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\text{Il existe bien un unique } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \text{ vérifiant } (*).}$$

17. $P_n^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_n^2(x_i) = 0$.

La fonction $t \mapsto P_n^2(t)e^{-t}$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,+\infty[$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} P_n^2(t)e^{-t}dt \neq 0$. P_n^2 vérifie $P_n^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} P_n^2(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_n^2(x_i)$.