Exercice 1 : Matrices et variables aléatoires

Soit A, B, C et D quatre variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Les variables B et C suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, et les variables A et D suivent la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Pour $\omega \in \Omega$, on définit la matrice carrée $M(\omega)$ en posant $M(\omega) = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ C(\omega) & D(\omega) \end{pmatrix}$.
On introduit les variables aléatoires X et Y définies par $X(\omega) = A(\omega) + D(\omega) = tr(M(\omega))$ et $Y(\omega) = A(\omega).D(\omega) - B(\omega).C(\omega) = det(M(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$.

1. Si $\omega \in \Omega$, montrer que $M^2(\omega) = X(\omega)M(\omega) - Y(\omega)I_2$, où I_2 est la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2. Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.

3. Dans cette question, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 qui sont des matrices de projecteurs.
   (a) Caractériser les matrices de $\mathcal{P}$.
   (b) Quelles sont les matrices $M(\omega)$ qui sont multiples de I_2 ?
   (c) Caractériser à l'aide de $X(\omega)$ et de $Y(\omega)$ le fait que $M(\omega) \in \mathcal{P}$ et ne soit pas multiple de I_2.
   (d) Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega, \quad M(\omega) \in \mathcal{P}\}$.

4. Calculer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega, \quad M(\omega) \in GL_2(\mathbf{R})\}$.

5. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et on introduit la variable aléatoire $\Delta = X^2 - 4Y$.
   (a) Montrer que Δ est à valeurs positives. Calculer $\mathbf{P}(\Delta = 0)$.
   (b) Déterminer la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega, \quad M(\omega) \in \mathcal{D}\}$.

Exercice 2 : Lancers d'une pièce

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$et face avec la probabilité $\frac{1}{2}$).
Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'événement « le k-ième lancer de la pièce donne pile » et par F_k l'événement
« le k-ième lancer de la pièce donne face ».
On appelle « série »une succession de lancers consécutifs amenant le même côté de la pièce. La série n°1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n°2 commence au lancer suivant la fin de la série $n1$ et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
Par exemple :

$$\text{Exemple :} \quad \underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{série n°1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{série n°2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{série n°3}} \cap F_8 \cap \cdots$$

L'objet de cet exercice est d'étudier le nombre de séries obtenues.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'événement de l'exemple dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \qquad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et } N_8 = 4$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les lois de N_1 et N_2.

2. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

3. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$, justifier que l'on a l'égélité $(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}$.

4. Montrer que l'on a :

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad \mathbf{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(N_n = k - 1)$$

5. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on note $G_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(N_m = k) x^k$$

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad G_{n+1}(x) = \dfrac{1 + x}{2} G_n(x)$.

   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $N_n - 1$ à partir de l'expression de G_n.

Fin de l'énoncé