On appelle *série entière* toute série de fonctions $\sum f_n$ pour laquelle il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad f_n(z) = a_n z^n$$

Par convention $f_0(z) = a_0$ pour tout complexe z.

Une telle série entière est notée $\sum a_n z^n$ et appelée série entière de la variable complexe z ; les a_n sont les coefficients de la série entière.

Lorsque la suite (a_n) n'est définie qu'à partir d'un rang n_0, on note alors $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n z^n$ la série entière correspondante.

On peut aussi considérer la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant réelle ou complexe.

Remarque :

Lorsque la série entière $\sum a_n z^n$ converge sur un domaine $D \subset \mathbf{C}$, on note $S : z \in D \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme de la série et $S_n : z \in \mathbf{C} \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ la somme partielle d'indice $n \in \mathbf{N}$. S_n est une fonction polynomiale, S n'en est pas une.

Exemples :

- $S : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ est définie sur $D = \{z \in \mathbf{C}, \quad |z| < 1\}$
- $S : z \in \mathbf{C} \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} = e^z$.

1 Rayon de convergence

Proposition 1.1 Lemme d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et z_0 un complexe non nul.

Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée alors pour tout complexe z

$$|z| < |z_0| \Longrightarrow \sum a_n z^n \text{ converge absolument.}$$

Proposition 1.2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
L'ensemble $I = \{r \geqslant 0, \quad (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ est un intervalle de $\mathbf{R}^+$ contenant 0.

Definition 1.1 **Rayon de convergence**

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble I précédemment défini, on le note R :

$$\boxed{R = Sup\,\{r \geqslant 0, \quad (a_n r^n) \text{ est bornée}\}}$$

Même définition dans le cas d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle et de la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x.

Exemple 1.1

- Le rayon de convergence de la série entière $\sum n! z^n$ est $R =$.
- Le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est $R =$.
- Le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est $R =$.

Remarque 1.1

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, l'ensemble $I = \{r \geqslant 0, \quad (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ est l'intervalle $[0, R[$ ou $[0, R]$.

Proposition 1.3 **Lien entre rayon de convergence et nature de la série entière**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Pour $z \in \mathbf{C}$,

- Si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$ alors $(a_n z^n)$ n'est pas bornée et donc $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z| = R$ alors il y a incertitude sur la nature de $\sum a_n z^n$.

Cas extrêmes :
Si $R = +\infty$ alors $\forall z \in \mathbf{C}, \quad \sum a_n z^n$ converge absolument.
Si $R = 0$ alors $\forall z \in \mathbf{C}, \quad \sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Les résultats précédents sont encore vrais pour une série entière d'une variable réelle, en remplaçant z par x.

Definition 1.2 *Disque ouvert de convergence - Intervalle ouvert de convergence*

Soit une série entière de rayon de convergence R.

- $B(0,R) = \{z \in \mathbf{C}, \quad |z| < R\}$ est appelé disque ouvert de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
- Lorsque l'on considère la série $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x, l'intervalle $]-R, R[$ est appelé intervalle ouvert de convergence de la série entière.

Proposition 1.4 **Théorème de comparaison**

Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

- Si $a_n = \alpha b_n$ avec $\alpha \in \mathbf{C}^*$ alors $R_a = R_b$
- Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$. *De même si* $a_n = o(b_n)$
- Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.
- Si $a_n = nb_n$ alors $R_a = R_b$.

Exemple 1.2

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque :

$$a_n = i\sin(n) \qquad a_n = 2 \qquad a_n = \frac{n^2}{n!} \qquad a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Proposition 1.5 **Règle de d'Alembert**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0 \quad a_n \neq 0$.

S'il existe $\ell \in [0, +\infty]$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$ alors $R = \dfrac{1}{\ell}$.

Exemple 1.3

Pour tout réel α, la série entière $\sum n^\alpha x^n$ est de rayon de convergence égal à 1.

Remarque 1.2 **Cas d'une série entière lacunaire**

On dit que la série entière $\sum a_n z^n$ est lacunaire lorsque $\forall n_0 \in \mathbf{N} \quad \exists n \geqslant n_0 \quad a_n = 0$.

La règle de d'Alembert précédente ne peut pas s'appliquer, mais on peut appliquer la règle de d'Alembert à une série numérique $\sum u_n$ bien choisie.

Exemples :

- Déterminer le rayon de convergence de $\sum \dfrac{z^{2n}}{2^n+1}$.
- Détermination du rayon de convergence de $\sum \dfrac{2n+1}{n!} z^n$.

Proposition 1.6 **Somme de deux séries entières**

On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

Soit R le rayon de convergence de la série somme $\sum (a_n+b_n) z^n$, $R \geqslant min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$.

$$\forall z \in \mathbf{C} \text{ tel que } |z| < min(R_a, R_b), \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Exemple 1.4

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum \frac{2n^2+3}{n!} z^n$.

Proposition 1.7 **Produit de Cauchy de deux séries entières**

On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbf{N} \text{ on pose } c_n = \sum_{k+p=n} a_k b_p = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$ (*produit de Cauchy des séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$)

$$R \geqslant min(R_a, R_b)$$

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad |z| < min(R_a, R_b) \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k+p=n} a_k b_p\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

2 Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle

On se limite dans ce paragraphe à des séries entières $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de nombres réels ou complexes.

Proposition 2.1 **Convergence normale**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- La série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]-R, R[$.

Proposition 2.2 **Continuité - Primitivation - Dérivation**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $f : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme.

f est continue sur $]-R, R[$ et donc intégrable sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]-R, R[$.

- Si F est une primitive de f alors $\forall x \in]-R,R[\quad F(x)-F(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$
- f est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et pour tout $k\in\mathbf{N}^*$ et tout x dans $]-R,R[$:

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}a_n\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}x^n$$

Exemple 2.1

1. $\forall x\in]-1,1[,\quad \mathrm{Arctan}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$.
2. $\forall k\in\mathbf{N},\quad \forall x\in]-1,1[,\qquad \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$.

Proposition 2.3 Continuité dans C - ADMIS

On admet la continuité sur le disque ouvert de convergence $D(0,R)$ de la fonction somme d'une série entière $\sum a_nz^n$, c'est-à-dire la continuité de S : $\begin{array}{l} B(0,R)\longrightarrow\mathbf{C} \\ z\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n \end{array}$.

Proposition 2.4 Coefficient d'une série entière

Soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme f.

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Proposition 2.5 Unicité

Soient $\sum a_nx^n$ et $\sum b_nx^n$ deux séries entières.

S'il existe $r>0$ tel que $\forall x\in]-r,r[\ \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ alors $\forall n\in\mathbf{N},\quad a_n=b_n$.

3 Développement en série entière au voisinage de 0

Definition 3.1

Soit f une fonction d'une variable réelle définie sur un intervalle I dont 0 est un point intérieur et r un réel strictement positif.

f est *développable en série entière* sur l'intervalle $]-r,r[$ s'il existe une suite (a_n) telle que :

$$\boxed{\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}$$

Definition 3.2

On appelle *Série de Taylor* (en 0) d'une fonction f de classe C^∞ la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Proposition 3.1 **Formule de Taylor avec reste intégral**

Si f est une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I contenant 0 alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in I \quad f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t}$$

Proposition 3.2 **Unicité du développement en série entière**

Si f est une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ alors

- f est de classe C^∞ sur $]-r,r[$
- f est égale à la somme de sa série de Taylor en 0 sur $]-r,r[$:
$$\forall x \in]-r,r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

On en déduit aussi que :

- Si f est paire alors $\forall n \in \mathbf{N}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ avec $a_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}$
- Si f est impaire alors $\forall n \in \mathbf{N}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$avec $a_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}$

4 Développements en série entière des fonctions usuelles

Pour vérifier si une fonction f est développable en série entière (au voisinage de 0) et trouver son développement, trois méthodes sont souvent utilisées :

- on reconnait f comme combinaison linéaire ou produit de fonctions dont on connait déjà le développement en série entière et on utilise les propriétés vues sur la somme ou le produit (de Cauchy) de séries entières (quitte à faire un petit changement de variable),

- on reconnait f comme primitive ou dérivée d'une fonction développable en série entière et on utilise les propriétés sur la primitivation ou la dérivation des séries entières,

- Si f est solution d'un problème de Cauchy (équation différentielle linéaire du premier ou du second ordre avec condition(s) initiale(s)).
  On cherche une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme S vérifie aussi le problème de Cauchy ; si une telle série entière existe alors par unicité de la solution d'un tel système différentiel , la somme de la série entière sera la fonction f.

Développements en série entière des fonctions usuelles :

Pour $\alpha \in \mathbf{R}^*$, la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est l'unique solution sur $]0, +\infty[$ du problème de Cauchy : $\begin{cases} (1+x)y' - \alpha y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

En déduire que $\forall x \in]-1,1[\quad (1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

$\forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
$\forall x \in [-1,1[, \quad \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$
$\forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
$\forall x \in]-1,1], \quad \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$
$\forall x \in]-1,1], \quad \mathrm{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$
$\forall \alpha \in \mathbf{R}^*, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}$
$\forall x \in \mathbf{R}, \quad e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
$\forall z \in \mathbf{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$
$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \lvert z\rvert < 1 \Longrightarrow \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

5 Fonctions génératrices

Dans ce paragraphe, on ne considère que des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbf{N}$.

Definition 5.1 **Fonction génératrice**

La série entière $\sum P(X = n)t^n$ est de rayon de convergence au moins égal à 1.

$G_X : t \mapsto E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$ est appelée la ***fonction génératrice*** de X.

Cas des variables aléatoires de lois usuelles

Loi	Fonction génératrice
$X \sim \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$	$G_X(t) =$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	$G_X(t) =$
$X \sim \mathcal{B}(n,p)$	$G_X(t) =$

Loi	Fonction génératrice
$X \sim \mathcal{G}(p)$	$G_X(t) =$
$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$G_X(t) =$

Proposition 5.1 **Fonction génératrice - Espérance - Variance**

- La fonction $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$ est continue sur $[-1, 1]$ et de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ avec

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}}$$

Par conséquent **la loi de X est caractérisée par sa fonction génératrice**.

- X est d'espérance finie si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 ; et dans ce cas :

$$\boxed{E(X) = G'_X(1)}$$

Proposition 5.2 Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes
Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** à valeurs dans **N** alors

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t).G_Y(t)$$

où G_X, G_Y, G_{X+Y} désignent respectivement les fonctions génératrices de X, Y et $X + Y$

Plus généralement : Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et à valeurs dans **N** alors

$$\forall t \in [-1, 1] \quad G_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$$