Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières de coefficients :

1. $\dfrac{2^n}{n^2}$ 2. $\dfrac{n^2}{3^n}$ 3. $\ln(n)$ 4. $n^{\sqrt{n}}$ 5. $i\dfrac{\ln(n)}{n^2}$

6. $\dfrac{(2n)!}{n!n^n}$ 7. $(2+(-1)^n)^n$ 8. $\sin(n)$ 9. $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{1+k^2}$

10. $\arctan(n^\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbf{R}$ 11. e^{an^2+bn+c} pour $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$

Exercice 2

On note R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$.
Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$?
Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 z^n$?

Exercice 3

Soit (a_n) une suite complexe non nulle périodique de période p :

$$\exists k \in \mathbf{N} \quad a_k \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad a_{n+p} = a_n$$

Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{p-1}X^{p-1}$.

1. Déterminer R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
2. On note $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Calculer $S(z)$ en fonction de $P(z)$ pour $|z| < R$.
3. Montrer que $S(x)$ a une limite finie quand $x \to R^-$ si et seulement si, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a_k = 0$ et exprimer alors cette limite à l'aide de P'.

Exercice 4

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 2 \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$.

1. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Déterminer le rayon de convergence, et calculer la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.
3. Retrouver la valeur de la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ sans utiliser l'expression obtenue en question 1.

Exercice 5

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{S_n} = 0$.
On note R et R' les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum S_n x^n$ et f et S leurs sommes.

1. Déterminer R' puis R.

2. Déterminer une relation entre f et S.

Exercice 6

Soit f la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ où $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n = \dfrac{1}{2n-1}\dbinom{2n}{n}$.

1. Vérifier que $\forall n \in \mathbf{N} \quad (n+1)a_{n+1} = 2(2n-1)a_n$.
2. Déterminer R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
3. Déterminer une "quation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f, en déduire une expression de f.

Exercice 7

Résoudre l'équation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+3n+1)x^n = 0$.

Exercice 8

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$.

Pour $x \in]-R, R[$, calculer $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$.

Exercice 9

On souhaite déterminer la valeur de $A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n(3n+1)}$.

1. Déterminer R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^{3n+1}$ où $a_n = \dfrac{1}{n(3n+1)}$.
2. Déterminer sur $]-R, R[$ une expression explicite de $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{3n+1}$.
3. En déduire la valeur de A.

Exercice 10

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles satisfaisant les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

On pose $U(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}x^n$ et $V(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{v_n}{n!}x^n$.

1. En posant $M = Max\,\{|u_0|, |v_0|\}$, montrer que $\forall n \in \mathbf{N} \quad |u_n| \leqslant M.5^n$ et $|v_n| \leqslant M.5^n$.
2. En déduire le rayon de convergence des séries entières de somme U et V.
3. Montrer que $(U+2V)' = 3(U+2V)$ et $(U-2V)' = -(U-2V)$.
4. En déduire les valeurs de U et V.

Exercice 11

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

Exercice 12

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t^2)}{t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(2k+1)^2}\mathrm{d}t$

Exercice 13

Soit (a_n) une suite réelle définie par $a_0 = a_1$ et $\forall n \geqslant 2 \quad a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$.
Déterminer une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N} \quad f^{(n)}(0) = a_n$.

Exercice 14

Soit $f : t \mapsto \dfrac{t}{2-t^2}$.

1. Développer f en série entière, préciser son rayon de convergence.
2. Donner la loi d'une variable aléatoire X dont la fonction génératrice est f.
3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 15

1. Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$.
2. Même question avec $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{2(1-x)}{1+4x}\right)$.