Exercice 1 : Oral ESCP 2023

Soit A, B, C et D quatre variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Les variables B et C suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, et les variables A et D suivent la loi uniforme sur $\{-1,0,1\}$. Pour $\omega \in \Omega$, on définit la matrice carrée $M(\omega)$ en posant $M(\omega) = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ C(\omega) & D(\omega) \end{pmatrix}$.
On introduit les variables aléatoires X et Y définies par $X(\omega) = A(\omega) + D(\omega) = tr(M(\omega))$ et $Y(\omega) = A(\omega).D(\omega) - B(\omega).C(\omega) = det(M(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Remarque : Les variables aléatoires A, B, C et D sont finies, donc toutes les variables introduites dans l'énoncé sont finies, elles sont alors d'espérance finie et admettent une variance.

1. Si $\omega \in \Omega$, par produit matriciel, on a :

$$M^2(\omega) = \begin{pmatrix} A^2(\omega) + B(\omega)C(\omega) & A(\omega)B(\omega) + B(\omega)D(\omega) \\ C(\omega)A(\omega) + D(\omega)C(\omega) & C(\omega)B(\omega) + D^2(\omega) \end{pmatrix}$$

$X(\omega)M(\omega) = \begin{pmatrix} A^2(\omega) + A(\omega)D(\omega) & A(\omega)B(\omega) + D(\omega)B(\omega) \\ A(\omega)C(\omega) + D(\omega)C(\omega) & A(\omega)D(\omega) + D^2(\omega) \end{pmatrix}$.

$-Y(\omega)I_2 = \begin{pmatrix} -A(\omega)D(\omega) + B(\omega)C(\omega) & 0 \\ 0 & -A(\omega)D(\omega) + B(\omega)C(\omega) \end{pmatrix}$ alors par somme de deux matrices à coefficients réels on a immédiatement :

$$\boxed{M^2(\omega) = X(\omega)M(\omega) - Y(\omega)I_2, \text{ où } I_2 \text{ est la matrice identité de } \mathcal{M}_2(\mathbf{R}).}$$

2. • Par linéarité de l'espérance $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(A) + \mathbf{E}(D)$. A et D suivent la même loi uniforme sur $[\![-1,1]\!]$, alors $\mathbf{E}(A) = \mathbf{E}(D) = (-1)\mathbf{P}(A = -1) + 0\mathbf{P}(A = 0) + 1.\mathbf{P}(A = 1) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$.

   A et D sont indépendantes donc

$$V(X) = V(A) + V(D) = 2V(A) = 2\left(\mathbf{E}(A^2) - E^2(A)\right) = 2\mathbf{E}(A^2)$$

   Par théorème de transfert $\mathbf{E}(A^2) = (-1)^2\mathbf{P}(A = -1) + 0^2\mathbf{P}(A = 0) + 1^2.\mathbf{P}(A = 1) = \frac{2}{3}$. On a donc $V(X) = \frac{4}{3}$.

   • Les variables aléatoires A, B, C et D sont mutuellement indépendantes, donc par linéarité :

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(AD) - \mathbf{E}(BC) = \mathbf{E}(A)\mathbf{E}(D) - \mathbf{E}(B)\mathbf{E}(C)$$

   On a vu $\mathbf{E}(A) = \mathbf{E}(D) = 0$ et B et C suivent la même loi de Bernoulli de paramètre p, donc $\mathbf{E}(B) = \mathbf{E}(C) = p^2$. On a donc $\mathbf{E}(Y) = -p^2$.

   Par le lemme des coalitions $Z = AD$ et $U = -BC$ sont indépendantes et on a :

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(Z + U) = \mathbf{V}(Z) + \mathbf{V}(U) = \mathbf{V}(AD) + (-1)^2\mathbf{V}(BC) = \mathbf{V}(AD) + \mathbf{V}(BC)$$

   On a aussi : A^2 et D^2 sont indépendantes, B^2 et C^2 sont indépendantes donc

$$\mathbf{V}(AD) = \mathbf{E}(A^2D^2) - \mathbf{E}^2(A)\mathbf{E}^2(D) = \left(\mathbf{E}(A^2)\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$\mathbf{E}(B^2) = \mathbf{V}(B) + \mathbf{E}^2(B) = p(1-p) + p^2 = p$ donc
$\mathbf{V}(BC) = \mathbf{E}(B^2)\mathbf{E}(C^2) - \mathbf{E}^2(B)\mathbf{E}^2(C) = p^2 - p^4 = p^2(1-p^2)$ et

$$\mathbf{V}(Y) = \frac{4}{9} + p^2(1-p^2)$$

Finalement $\boxed{\mathbf{E}(X) = 0,\ \mathbf{V}(X) = \frac{4}{3},\ \mathbf{E}(Y) = -p^2 \text{ et } \mathbf{V}(Y) = \frac{4}{9} + p^2(1-p^2)}$

3. Dans cette question, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 qui sont des matrices de projecteurs.

   (a) Les matrices de $\mathcal{P}$ sont les matrices $\boxed{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \text{ telles que } M^2 = M.}$

   (b) $M(\omega)$ est multiple de I_2 si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $M(\omega) = \lambda I_2$.

$$M(\omega) = \lambda I_2 \iff M(\omega) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} A(\omega) = \lambda \\ B(\omega) = 0 \\ C(\omega) = 0 \\ D(\omega) = \lambda \end{cases}$$

   $M(\omega)$ est un multiple de I_2 si et seulement si $A(\omega) = D(\omega)$ et $B(\omega) = C(\omega) = 0$. Puisque $A(\Omega) = D(\Omega) = [\![-1, 0, 1]\!])$, on a finalement :

$$\boxed{M(\omega) \text{ est un multiple de } I_2 \text{ si et seulement si } M(\omega) \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

   (c) • Si $M(\omega) \in \mathcal{P}$ et n'est pas multiple de I_2, alors $M^2(\omega) = M(\omega)$ et la famille $(M(\omega), I_2)$ est libre. On a donc

$$M^2(\omega) = M(\omega) \Longrightarrow X(\omega)M(\omega) - Y(\omega)I_2 = M(\omega) \Longrightarrow X(\omega) = 1 \text{ et } Y(\omega) = 0$$

   • Si $X(\omega) = 1$ et $Y(\omega) = 0$ alos $M^2(\omega) = X(\omega)M(\omega) - Y(\omega)I_2 = M(\omega)$. De plus $X(\omega) = A(\omega) + D(\omega) = 1$ avec $(A(\omega), D(\omega)) \in \{-1, 0, 1\}^2$, on ne peut donc pas avoir $A(\omega) = D(\omega)$ et $M(\omega)$ n'est donc pas multiple de I_2.

$$\boxed{M(\omega) \in \mathcal{P} \text{ et } M(\omega) \text{ non multiple de } I_2 \text{ si et seulement si } X(\omega) = 1 \text{ et } Y(\omega) = 0.}$$

   (d) On note $H = \{\omega \in \Omega, \quad M(\omega) \in \mathcal{P}\}$.

   On déduit des deux questions précédentes que $M(\omega) \in \mathcal{P}$ si et seulement si ($X(\omega) = 1$ et $Y(\omega) = 0$) ou ($M^2(\omega) = M(\omega)$ avec $M(\omega) \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$), ce qui donne ($X(\omega) = 1$ et $Y(\omega) = 0$) ou $M(\omega) = O_2$ ou $M(\omega) = I_2$.

   $\mathbf{P}(H) = \mathbf{P}\left(((A = D = 1) \cap (B = 0 = C)) \cup (A = D = 0 = B = C) \cup ((X = 1) \cap (Y = 0))\right)$

Par incompatibilité d'événements, et sachant que les variables aléatoires A, D, B, C sont indépendantes avec $A \sim D$ et $B \sim C$ on a :

$$\mathbf{P}\left(H\right) = \mathbf{P}^2(A=1)\mathbf{P}^2(B=0) + \mathbf{P}^2(A=0)\mathbf{P}^2(B=0) + \mathbf{P}\left(X=1, Y=0\right)$$

Or $A(\Omega) = D(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ donc

$$(X=1) = (A+D=1) = (A=0, D=1) \cup (A=1, D=0)$$

ces événements étant incompatibles on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=1, Y=0) &= \mathbf{P}(A=1, D=0, BC=0) + \mathbf{P}(A=0, D=1, BC=0) \\
&\quad \text{et par variables aléatoires indépendantes} \\
&= \mathbf{P}(BC=0) \times [\mathbf{P}(A=1)\mathbf{P}(D=0) + \mathbf{P}(A=0)\mathbf{P}(D=1)] \\
&\quad A \sim D \sim \mathbf{U}\left(\llbracket -1, 1 \rrbracket\right) \text{ donc} \\
\mathbf{P}(X=1, Y=0) &= \frac{2}{9}\mathbf{P}(BC=0)
\end{aligned}$$

Puisque $B(\Omega) = C(\Omega) = \{0, 1\}$ on a $\Omega = (BC=0) \cup (BC=1)$ et

$$\mathbf{P}(BC=0) = 1 - \mathbf{P}(BC=1) = 1 - \mathbf{P}(B=1)\mathbf{P}(C=1) = 1 - p^2$$

donc $\mathbf{P}(X=1, Y=0) = \dfrac{2}{9}(1-p^2)$ et finalement

$$\mathbf{P}\left(H\right) = \frac{(1-p)^2}{9} + \frac{(1-p)^2}{9} + \frac{2(1-p^2)}{9} = \frac{4(1-p)}{9}$$

On pouvait aussi écrire $(BC=0) = (B=0) \cup (C=0)$ *donc* $\mathbf{P}(BC=0) = \mathbf{P}(B=0) + \mathbf{P}(C=0) - \mathbf{P}(B=0).\mathbf{P}(C=0) = 1-p+1-p-(1-p)^2$, *ou encore* $(BC=0) = (B=0, C=0) \cup (B=0, C=1) \cup (B=1, C=0)$ *ces trois événements étant incompatibles.*

$$\boxed{\text{La probabilité de l'événement } \{\omega \in \Omega, \quad M(\omega) \in \mathcal{P}\} \text{ est égale à } \frac{4(1-p)}{9}.}$$

4. On a immédiatement : $G = \{\omega \in \Omega, \quad M(\omega) \in GL_2(\mathbf{R})\} = (Y \neq 0) = \overline{(Y=0)}$, donc

$$\mathbf{P}(G) = 1 - \mathbf{P}(AD = BC)$$

On a vu dans la question précédente que $BC \sim \mathcal{B}(p^2)$, alors avec le système complet d'événements $((BC=0), (BC=1))$, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(G) &= 1 - \mathbf{P}(BC=0, AD=BC) - \mathbf{P}(BC=1, AD=BC) \\
&= 1 - \mathbf{P}(BC=0, AD=0) - \mathbf{P}(BC=1, AD=1) \\
&\quad \text{par le lemme des coalitions on a} \\
\mathbf{P}(G) &= 1 - \mathbf{P}(BC=0).\mathbf{P}(AD=0) - \mathbf{P}(BC=1)\mathbf{P}(AD=1)
\end{aligned}$$

Or $A \sim D \sim \mathbf{U}(\llbracket -1, 1 \rrbracket)$ donc $(AD = 1) = (A = 1 = D) \cup (A = -1 = D)$, par incompaticilité de ces deux événements et indépendance des variables A et D on a :

$$\mathbf{P}(AD = 1) = \mathbf{P}(A = -1)\mathbf{P}(D = -1) + \mathbf{P}(A = 1)\mathbf{P}(D = 1) = \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(AD = 0) &= \mathbf{P}((A = 0) \cup (D = 0)) \\
&= \mathbf{P}(A = 0) + \mathbf{P}(D = 0) - \mathbf{P}(A = 0, D = 0) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{9} \\
\mathbf{P}(AD = 0) &= \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(G) = 1 - \frac{5(1-p^2)}{9} - \frac{2p^2}{9}$$

$$\boxed{\text{La probabilité de l'événement } \{\omega \in \Omega, \quad M(\omega) \in GL_2(\mathbf{R})\} \text{ est égale à } \frac{3p^2+4}{9}}$$

5. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et on introduit la variable aléatoire $\Delta = X^2 - 4Y$.

   (a) Par définition de X et Y on a :

   $$\Delta = (A + D)^2 - 4AD + 4BC = A^2 + 2AD + D^2 - 4AD + 4BC = (A - D)^2 + 4BC$$

   B et C sont à valeurs positives et A et D à valeurs réelles, $\boxed{\Delta \text{ est bien est à valeurs positives.}}$

   On a aussi, par somme nulle de réels positifs,

   $$\begin{aligned}
   \mathbf{P}(\Delta = 0) &= \mathbf{P}((A - D)^2 + 4BC = 0) \\
   &= \mathbf{P}(((A - D)^2 = 0) \cap (BC = 0))
   \end{aligned}$$

   par le lemme des coalitions, on a

   $$\begin{aligned}
   \mathbf{P}(\Delta = 0) &= \mathbf{P}((A - D)^2 = 0) \times \mathbf{P}(BC = 0) \\
   &= \mathbf{P}(A = D).(1 - p^2) \\
   &= (1 - p^2)\left[\mathbf{P}(A = -1, D = -1) + \mathbf{P}(A = 1, D = 1) + \mathbf{P}(A = 0, D = 0)\right] \\
   &= \frac{3}{9}(1 - p^2) \\
   \mathbf{P}(\Delta = 0) &= \frac{1 - p^2}{3}
   \end{aligned}$$

   (b) Soit $\omega \in \Omega$. On sait que le polynôme caractéristique de $M(\omega)$ est défini par

   $$\forall x \in \mathbf{R} \quad \chi(x) = x^2 - tr(M(\omega)x + det(M(\omega)) = x^2 - X(\omega)x + Y(\omega)$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est $\Delta(\omega) = X^2(\omega) - 4Y(\omega) \geqslant 0$.
Si $\Delta(\omega) \neq 0$ alors $\Delta(\omega) > 0$ et χ admet deux racines réelles distinctes donc $M(\omega)$ est diagonalisable et n'est pas un multiple de l'identité .

Si $\Delta(\omega) = 0$ alors $M(\omega)$ est diagonalisable si et seulement si $M(\omega)$ est un multiple de I_2.

Par 3(b) et ce qui précède on a donc :

$$K = \{\omega \in \Omega, \quad M(\omega) \in \mathcal{D}\} = (\Delta \neq 0) \cup ((A = D) \cap (B = 0) \cap (C = 0))$$

Et par 5(a) on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(K) &= \mathbf{P}(\Delta \neq 0) + \mathbf{P}(A = D).\mathbf{P}(B = 0)\mathbf{P}(C = 0) \\
&= (1 - \mathbf{P}(\Delta = 0)) + \mathbf{P}(A = D)(1 - p)^2 \\
&= 1 - \frac{1 - p^2}{3} + (1 - p)^2 \left(\mathbf{P}(A = 1, D = 1) + \mathbf{P}(A = -1, D = -1) + \mathbf{P}(A = 0, D = 0)\right) \\
&= 1 - \frac{1 - p^2}{3} + \frac{(1 - p)^2}{3} \\
\mathbf{P}(K) &= 1 - \frac{2p(1 - p)}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité de l'événement } \{\omega \in \Omega, \quad M(\omega) \in \mathcal{D}\} \text{ est égale à } 1 - \frac{2p(1-p)}{3}.}$$

Exercice 2 : Oral ESCP 2023

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$et face avec la probabilité $\frac{1}{2}$).
Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'événement ≪ le k-ième lancer de la pièce donne pile ≫ et par F_k l'événement
≪ le k-ième lancer de la pièce donne face ≫.
On appelle ≪ série ≫une succession de lancers consécutifs amenant le même côté de la pièce. La série n°1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n°2 commence au lancer suivant la fin de la série $n1$ et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
Par exemple :

$$\text{Exemple :} \quad \underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{série n°1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{série n°2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{série n°3}} \cap F_8 \cap \cdots$$

L'objet de cet exercice est d'étudier le nombre de séries obtenues.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'événement de l'exemple dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \qquad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et } N_8 = 4$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Par définition de N_n, on a immédiatement :
   • N_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1.

   • $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$ avec $(N_2 = 1) = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$, et par incompatibilité des événements et indépendance des lancers :

   $$\mathbf{P}(N_2 = 1) = \mathbf{P}(P_1).\mathbf{P}(P_2) + \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(F_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

   On en déduit que $\mathbf{P}(N_2 = 2) = 1 - \mathbf{P}(N_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $\boxed{N_2 \text{ suit la loi uniforme sur } [\![1, 2]\!].}$

2. Par définition de N_n, on a immédiatement $\boxed{N_n(\Omega) = [\![1, n]\!]}$

   $(N_n = 1)$ est l'événement « les n lancers donnent la même face de la pièce »et $(N_n = n)$ est l'événement « il y a alternance des faces de la pièce à chaque lancer ».

3. Pour n fixé, lorsque $P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, les lancers n et $n+1$ sont dans la même série, on en déduit que le nombre de séries jusqu'au lancer $n+1$ est le même que celui jusqu'au lancer n. On a donc $\boxed{\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad (N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}.}$

4. • <u>*1ère méthode : en lien direct avec la question précédente*</u>

   Avec le système complet d'événements (P_{n+1}, F_{n+1}) la formule des probabilités totales donne :

   $$\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad \mathbf{P}(N_{n+1} = k) = \mathbf{P}((N_{n+1} = k) \cap P_{n+1}) + \mathbf{P}((N_{n+1} = k) \cap F_{n+1})$$

   et avec le système complet d'événements (P_n, F_n) on a aussi :

   $$\mathbf{P}(N_{n+1} = k) = \begin{array}{c} \mathbf{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + \mathbf{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + \\ \mathbf{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) + \mathbf{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \end{array}$$

   D'après le résultat de la question précédente et par symétrie, on a :

   $$\mathbf{P}(N_{n+1} = k) = \begin{array}{c} \mathbf{P}((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + \mathbf{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + \\ \mathbf{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) + \mathbf{P}((N_n = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \end{array}$$

   Lorsque l'événement $F_n \cap P_{n+1}$ est réalisé les lancers n et $n+1$ ne sont pas dans la même série, il y a donc eu augmentation d'une série entre les lancers jusqu'à n et les lancers jusqu'à $n+1$, donc

   $$(N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1} = (N_n = k-1) \cap F_n \cap P_{n+1}$$

   et par symétrie $(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1} = (N_n = k-1) \cap P_n \cap F_{n+1}$ donc

   $$\mathbf{P}(N_{n+1} = k) = \begin{array}{c} \mathbf{P}((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + \mathbf{P}((N_n = k-1) \cap F_n \cap P_{n+1}) + \\ \mathbf{P}((N_n = k-1) \cap P_n \cap F_{n+1}) + \mathbf{P}((N_n = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \end{array}$$

Par indépendance du lancer n+1 avec les précédents et avec $\mathbf{P}(P_{n+1}) = \dfrac{1}{2} = \mathbf{P}(F_{n+1})$

$$\mathbf{P}(N_{n+1} = k) = \begin{array}{l} \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_n = k) \cap P_n) + \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_n = k-1) \cap F_n) + \\ \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_n = k-1) \cap P_n) + \frac{1}{2}\mathbf{P}((N_n = k) \cap F_n) \end{array}$$

Avec le système complet d'événements (F_n, P_n) et la formule des probabilités totales on peut alors écrire :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n+1]\!] \quad \mathbf{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(N_n = k-1)}$$

- *2nde méthode :*

$N_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$, alors $((N_n = i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements et par la formule des probabilités totales, $\mathbf{P}(N_{n+1} = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(N_n = i, N_{n+1} = k)$ ou encore

$\mathbf{P}(N_{n+1} = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(N_n = i).\mathbf{P}_{(N_n=i)}(N_{n+1} = k)$ avec la convention
$\mathbf{P}(N_n = i).\mathbf{P}_{(N_n=i)}(N_{n+1} = k) = 0$ si $\mathbf{P}(N_n = i) = 0$.

D'après l'expérience entre le lancer n et le lancer $n+1$ le nombre de séries est soit contant soit augmenté de un, donc $\forall i \notin [\![k-1, k]\!] \quad (N_n = i) \cap (N_{n+1} = k) = \oslash$ et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_{n+1} = k) &= \mathbf{P}(N_k = k-1, N_{n+1} = k) + \mathbf{P}(N_n = k, N_{n+1} = k) \\ &= \mathbf{P}(N_n = k).\mathbf{P}_{(N_n=k-1)}(N_{n+1} = k) + \mathbf{P}(N_n = k).\mathbf{P}_{(N_n=k)}(N_{n+1} = k) \end{aligned}$$

Lors d'un lancer il n'y a que deux résultats possibles Pile ou Face avec pour chacun une probabilité égale à $\dfrac{1}{2}$.

Sachant que $(N_n = k-1)$ est réalisé (et en supposant qu'il soit de probabilité non nulle), $(N_{n+1} = k)$ est réalisé si et seulement si le résultat du lancer $n+1$ est différent du résultat du lancer n donc $\mathbf{P}_{(N_n=k-1)}(N_{n+1} = k) = \dfrac{1}{2}$.
De même sachant que $(N_n = k)$ est réalisé (et en supposant qu'il soit de probabilité non nulle), $(N_{n+1} = k)$ est réalisé si et seulement si le résultat du lancer $n+1$ est le même que celui du lancer n, donc $\mathbf{P}_{(N_n=k)}(N_{n+1} = k) = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Et finalement } \mathbf{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(N_n = k-1) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(N_n = k)}$$

5. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on note $G_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(N_m = k)x^k$$

(a) Avec l'égalité obtenue en question précédente on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \forall x\in\mathbf{R} \quad G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1}\mathbf{P}(N_n=k)\frac{x^k}{2}+\sum_{k=1}^{n+1}\mathbf{P}(N_n=k-1)\frac{x^k}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbf{P}(N_n=k)x^k+\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbf{P}(N_n=k-1)x^{k-1}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbf{P}(N_n=k)x^k+\frac{x}{2}\sum_{i=0}^{n}\mathbf{P}(N_n=i)x^{i}
\end{aligned}$$

or $N_n(\Omega)=[\![1,n]\!]$ donc $\mathbf{P}(N_n=n+1)=0=\mathbf{P}(N_n=0)$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \forall x\in\mathbf{R} \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(N_n=k)x^k+\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(N_n=k)x^k$$

Finalement : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \forall x\in\mathbf{R} \quad G_{n+1}(x)=\frac{1+x}{2}G_n(x).}$

(b) D'après l'égalité précédente, pour x fixé dans $\mathbf{R}$, la suite réelle $(G_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1+x}{2}$, alors $\forall x\in\mathbf{R} \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \quad G_n(x)=\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}G_1(x)$ et $G_1(x)=\mathbf{P}(N_1=1)x=x$, donc

$$\forall x\in\mathbf{R} \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \quad G_n(x)=x\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}$$

Par la formule du binôme de Newton, pour $x\in\mathbf{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \frac{x}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{x^{k+1}}{2^{n-1}}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}\frac{1}{2^{n-1}}x^j\\
G_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(N_n=k)x^k=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{n-1}}x^k
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients d'une fonction polynômiale :

$$\forall k\in[\![1,n]\!] \quad \mathbf{P}(N_n=k)=\binom{n-1}{k-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$$

On avait $N_n(\Omega)=[\![1,n]\!]$, donc N_n-1 prend ses valeurs dans $[\![0,n-1]\!]$ avec

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!] \quad \mathbf{P}(N_n-1=k)=\mathbf{P}(N_n=k+1)=\binom{n-1}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}$$

donc $N_n - 1$ suit la loi binômiale $\mathcal{B}\left(n-1, \dfrac{1}{2}\right)$.

Fin de l'énoncé