Dans tout ce chapitre $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$.

1 Rappels : Equations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

Definition 1.1

• On appelle équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1, toute équation du type :

$$(E), \quad a(t)y' + b(t)y + c(t) = 0$$

où a, b, c sont trois fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$.

• On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbf{K}$ vérifie l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 (E) lorsque : la fonction f est dérivable sur I et $\forall t \in I, \quad a(t)f'(t) + b(t)f(t) + c(t) = 0$.

Proposition 1.1 **Ensemble des solutions d'une équation résolue**

Soient a et b deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$. On considère les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 (E) et (H) définies par :

$$(E) \quad y' + a(t)y = b(t) \qquad\qquad (H) \quad y' + a(t)y = 0$$

(H) s'appelle l'équation différentielle homogène associée à l'équation (E).

L'ensemble des solutions de l'équation (H) sur l'intervalle I est la droite vectorielle

$$S_I(H) = \left\{t \mapsto \lambda.e^{-A(t)}, \quad \lambda \in \mathbf{K}\right\}$$

où $A : t \in I \mapsto A(t)$ est une primitive sur I de la fonction $a : t \mapsto a(t)$.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation (E) est la droite affine

$$S_I(E) = \left\{t \mapsto f_0(t) + \lambda e^{-A(t)}, \quad \lambda \in \mathbf{K}\right\}$$

où $A : t \in I \mapsto A(t)$ est une primitive sur I de la fonction a et f_0 est une solution particulière de (E).

Remarque 1.1 **Méthode de variation de la constante**

On peut appliquer la méthode dite de variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation $(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$:
on cherche une solution particulière f_0 de (E) sous la forme $f_0(t) = \lambda(t).e^{-A(t)}$ où λ est une fonction dérivable sur I zet A est une primitive de la fonction $a : t \mapsto a(t)$.

$$f_0 \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \iff \forall t \in I, \quad \lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$$

Application : Résoudre sur $\mathbf{R}_+^*$ l'équation différentielle $y' + \dfrac{2}{t}y = t^2$.

Proposition 1.2 **Problème de Cauchy**

Soient a et b deux fonctions continues sur I et soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}$.

Le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$ admet une unique solution.

Cette solution peut être donnée sous forme intégrale :
$f : t \mapsto e^{-A(t)} \left(e^{A(t_0)} y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(x) e^{A(x)} \mathrm{d}x \right)$ où A est une primitive sur I de la fonction a.

Remarque 1.2 **Principe de superposition**

Pour résoudre une équation différentielle linéaire scalaire sur premier ordre de la forme
$(E) \quad y' + a(t)y = b(t) + c(t)$ avec a, b, c continues sur I. On peut :

- résoudre l'équation homogène associée $(H) \quad y' + a(t)y = 0$,
- chercher une solution particulière f_b de l'équation $(E_b) \quad y' + a(t)y = b(t)$,
- chercher une solution particulière f_c de $(E_c) \quad y' + a(t)y = c(t)$.

Les solutions de (E) seront les fonctions $t \mapsto f_b(t) + f_c(t) + \lambda e^{-A(t)}$ avec A une primitive de a et λ un scalaire quelconque.

Remarque 1.3 **Equation différentielle non résolue**

Dans le cas d' une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 non résolue en y', c'est-à-dire de la forme $(E) \quad a(t)y' + b(t)y + c(t) = 0$ sur un intervalle I, on peut appliquer les résultats précédents à tout intervalle J où la fonction a ne s'annule pas.

2 Rappels : Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Soient $(a, b) \in \mathbf{K}^2$, et (H) l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = 0$$

Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ associée à (H) admet :

- deux solutions distinctes r_1 et r_2 alors les solutions de (H) sont les fonctions $f : t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$.

- une seule solution r alors les solutions de (H) sont les fonctions $f : t \mapsto (\alpha t + \beta)e^{rt}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$.

Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$

Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ admet deux solutions complexes non réelles, elles sont conjuguées : $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r} = \alpha - i\beta$ alors les solutions réelles de (H) sont les fonctions

$$f : t \mapsto e^{\alpha t} \left(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)\right) \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

Remarque 2.1

Pour résoudre l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $y'' + ay' + by = Ae^{\lambda t}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$, on cherche une solution particulière sous la forme :

- $f : t \mapsto \alpha e^{\lambda t}$ si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique,
- $f : t \mapsto \alpha t e^{\lambda t}$ si λ est une racine simple de l'équation caractéristique.
- $f : t \mapsto \alpha t^2 e^{\lambda t}$ si λ est racine double de l'équation caractéristique.

Application : Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation : $y'' + 4y = \sin(2t)$.

3 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

On s'intéresse dans ce paragraphe, aux équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 de la forme :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \qquad (E)$$

avec a, b, c des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$.

On appellera solution de l'équation (E) sur l'intervalle I, toute fonction y deux fois dérivable sur I qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

On remarque qu'alors y est de classe C^2 sur I.

Proposition 3.1 **Forme des solutions**

Toute solution de (E) $\quad y''+a(t)y'+b(t)y = c(t)$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

Proposition 3.2 **Théorème de Cauchy linéaire** - *Admis*

$\forall (t_0, \alpha, \beta) \in I \times \mathbf{K} \times \mathbf{K}$, le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$

admet une unique solution sur I.

Corollaire 3.3 **Ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène d'ordre 2**

L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ est un **sous-espace vectoriel** de $C^2(I, \mathbf{K})$ de **dimension** 2.

Remarque 3.1 **Abaissement de l'ordre**

Si on connait une solution φ de l'équation homogène $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ qui ne s'annule pas sur l'intervalle d'étude, on peut chercher toutes les solutions de l'équation (E) $\quad y''+a(t)y'+b(t)y = c(t)$ sous la forme $\boxed{y : t \mapsto \varphi(t)z(t)}$ car z' est alors solution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1.

Exemple 3.1

Montrer que l'équation différentielle $(1 + t^2)^2y'' - 2t(t^2 + 1)y' + 2(t^2 - 1)y = 0$ admet une solution polynomiale. En déduire la résolution complète de l'équation.

4 Séries entières et équations différentielles

On cherche les solutions développables en série entière d'une équation différentielle du type :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$
ou
$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x)$$

avec a, b, c des fonctions polynômiales et g une fonction polynômiale ou une fonction développable en série entière.

Méthode générale : **Pour déterminer les solutions développables en séries entière d'une telle équation différentielle, on procède par analyse/synthèse :**

• **Analyse** :

On suppose qu'il existe une série entière $\sum a_nx^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que sa somme f soit solution de l'équation (E).

Par définition $\forall x \in]-R, R[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ et f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$.

On sait que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k + 1)a_{k+1}x^k \text{ et}$$
$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k + 2)(k + 1)a_{k+2}x^k$$

On écrit alors :
f est solution de l'équation différentielle $\iff \cdots$ (on remplace dans l'équation différentielle

$f(x), f'(x), f''(x)$ par leurs expressions et on développe).

On effectue si besoin des décalages d'indice pour ramener chacune des sommes à des sommes de termes en x^n, dans le but d'obtenir une égalité du type :

$$\boxed{f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-R, R[\iff \forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = 0}$$

ou

$$\boxed{f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-R, R[\iff \forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n}$$

avec b_n coefficients indépendants de x et c_n les coefficients du développement en série entière de g.

On en déduit, **par unicité du développement en série entière**, que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad b_n = 0$, ou $\forall n \in \mathbf{N}, \quad b_n = c_n$, ce qui donne une relation entre les coefficients $a_n, a_{n+1}, \cdots$.

Lorsque c'est possible, on exprime a_n en fonction de n à partir de la relation obtenue.

• Synthèse :

On introduit la série entière $\sum a_n x^n$ avec la relation entre $a_n, a_{n+1}, \cdots$ ou avec l'expression de a_n en fonction de n, et on **calcule le rayon de convergence** R, soigneusement (par exemple avec la règle de d'Alembert), pour vérifier que $R > 0$.

• Conclusion :

On peut alors écrire : Les calculs précédents ayant été faits par équivalence, on a montré que les solutions développables en série entière de l'équation différentielle sont les fonctions : $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Le cas échéant, on exprime f à l'aide de fonctions usuelles en reconnaissant des développements en série entière classiques.

Exemple 4.1
La fonction cosinus est l'unique fonction qui vérifie sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = 0$ et les conditions initiales $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.
On en déduit que la fonction cosinus est développable en série entière avec

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$