ÉNONCÉ

Calculatrice autorisée

Notations et rappels

Pour n et p deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{V}_{n,p}$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\{-1, 1\}$.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note M^T sa transposée.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, I_n la matrice identité d'ordre n et 0_n la matrice nulle d'ordre n.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{tr}(M)$ sa trace.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si $M^\mathsf{T} = -M$.

On note $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles.

On définit la suite des puissances de M par

$$\begin{cases} M^0 = I_n \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad M^{k+1} = MM^k \end{cases}$$

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0_n$.

On note $\mathcal{N}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices nilpotentes.

Si U est une partie d'un espace vectoriel E, on note $\mathrm{Vect}(U)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par U.

Toutes les variables aléatoires considérées dans les parties II, III et IV sont définies sur un même espace probabilisé discret $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Étant donné une variable aléatoire réelle Z, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(Z)$ son espérance et $\mathbb{V}(Z)$ sa variance.

On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant, connu sous le nom de lemme des coalitions :

> Si $X_1, \dots, X_N$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, alors, pour tout
> entier naturel $k \in [\![1, N-1]\!]$, toute fonction f de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ et toute fonction g de $\mathbb{R}^{N-k}$ dans
> $\mathbb{R}$, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \dots, X_N)$ sont indépendantes.

Dans la partie III, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Son produit scalaire est noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

On note ch la fonction cosinus hyperbolique.

Objectifs du problème et articulations entre les différentes parties

Ce problème porte sur l'étude de certains sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, où n est un entier naturel non nul.

Dans la partie I, on étudie quelques propriétés de l'ensemble $\mathcal{N}_n$. Dans les parties II et III, on s'intéresse à des variables aléatoires réelles et matricielles à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Dans la partie IV, on établit, à l'aide d'outils d'analyse et de probabilités, l'existence d'une famille de vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant certaines propriétés de nature euclidienne.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes les unes des autres. Cependant, le résultat de la question 9 est utilisé dans la sous-partie II.C, ceux des questions 14 et 16 sont utilisés dans la sous-partie II.D et celui de la question 19 dans la partie IV.

I Partie I

I.A – Quelques résultats préliminaires

Q 1. Démontrer que l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \operatorname{tr}(M) \end{array} \right.$$

est une forme linéaire et que

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Q 2. Montrer que l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \operatorname{tr}\left(A^\top B\right) \end{array} \right.$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 3. En déduire que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^\top A = 0_n$ alors $A = 0_n$.

I.B – Quelques propriétés de $\mathcal{N}_n$

Q 4. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors 0 est une valeur propre de A et que c'est la seule valeur propre complexe de A.

Q 5. Déterminer la trace et le déterminant d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 6. Montrer que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors M^2 est nilpotente.

Q 7. On suppose que M et N sont deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que $M\,N$ et $M+N$ sont nilpotentes.

Q 8. On suppose que M, N et $M+N$ sont nilpotentes. En calculant $(M+N)^2 - M^2 - N^2$, montrer que $\operatorname{tr}(M\,N) = 0$.

Q 9. Démontrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si $\det(M) = \operatorname{tr}(M) = 0$.

Q 10. Montrer que la seule matrice réelle nilpotente et symétrique est la matrice nulle.

Q 11. Soit A une matrice antisymétrique réelle et nilpotente. Montrer que $A^\top A = 0_n$, puis que $A = 0_n$.

Q 12. On suppose $n \geqslant 3$. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle et de déterminant nul, mais non nilpotente.

II Matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$

II.A – Quelques résultats algébriques

Soit $E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $V = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E_k$.

Q 13. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, exprimer E_i en fonction de V et de $V - 2E_i$. En déduire que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{V}_{n,1})$. (L'ensemble $\mathcal{V}_{n,p}$ a été défini dans les notations présentées au début du problème.)

Soient $C_1, \ldots, C_n$, n matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec C_1 non nulle.

Q 14. Démontrer que, si la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est liée, alors il existe un unique $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que

$$\begin{cases} (C_1, \ldots, C_j) \text{ est libre} \\ C_{j+1} \in \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_j) \end{cases}$$

Soit $d \in [\![1, n]\!]$, $(U_1, \ldots, U_d)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $H = \mathrm{Vect}(U_1, \ldots, U_d)$.

Q 15. Démontrer qu'il existe des entiers $i_1, \ldots, i_d$ vérifiant $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_d \leqslant n$ tels que l'application

$$\left|\begin{array}{ccc} H & \to & \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_d} \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

soit bijective.

On pourra s'intéresser au rang de la matrice de $\mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $U_1, \ldots, U_d$.

Q 16. Soit $\mathcal{W}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension d. Démontrer que

$$\mathrm{card}\,(\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{n,1}) \leqslant 2^d.$$

II.B – Une loi de probabilité

On dit qu'une variable réelle X suit la loi $\mathcal{R}$ si

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \qquad \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Q 17. Si X suit la loi $\mathcal{R}$, préciser la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X+1)$.

Q 18. Calculer l'espérance et la variance d'une variable suivant la loi $\mathcal{R}$.

Q 19. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant chacune la loi $\mathcal{R}$. Déterminer la loi de leur produit XY.

II.C – Un premier procédé de génération de matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$

Jusqu'à la fin de la partie II, n est un entier naturel non nul et $m_{i,j}$ ($1 \leqslant i, j \leqslant n$) sont n^2 variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{R}$. La variable aléatoire matricielle $M_n = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est alors à valeurs dans $\mathcal{V}_{n,n}$.

On pose $\tau_n = \mathrm{tr}\,(M_n)$ et $\delta_n = \det\,(M_n)$.

Q 20. Calculer l'espérance et la variance de la variable τ_n.

Q 21. Calculer l'espérance de la variable δ_n.

Q 22. Démontrer que la variance de la variable δ_n est égale à $n!$
On pourra développer δ_n selon une rangée et raisonner par récurrence.

Dans le cas particulier $n = 2$, m_{11}, m_{12}, m_{21} et m_{22} sont quatre variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{R}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$.

Q 23. Calculer la probabilité de l'événement $M_2 \in \mathcal{N}_2$.

Q 24. Calculer la probabilité de l'événement $M_2 \in \mathcal{G}\ell_2(\mathbb{R})$.

II.D – Une généralisation

L'objectif de cette sous-partie est de prolonger le dernier résultat de la partie précédente, en trouvant, dans le cas général où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 , un minorant de la probabilité de l'évènement $M_n \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$.

II.D.1) On considère $2n$ variables aléatoires réelles $c_1, c_2, \dots, c_n$ et $c'_1, c'_2, \dots, c'_n$ mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{R}$.

Q 25. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$. Calculer $\mathbb{P}\big((c_1 = \varepsilon_1) \cap \dots \cap (c_n = \varepsilon_n)\big)$.

On considère les matrices colonnes aléatoires $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$.

Q 26. Démontrer que, pour tout $\omega \in \Omega$, la famille $\big(C(\omega), C'(\omega)\big)$ est liée si et seulement s'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $C'(\omega) = \varepsilon C(\omega)$.

Q 27. En déduire $\mathbb{P}\big((C, C') \text{ est liée}\big)$.

II.D.2) On rappelle que $m_{i,j}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ sont n^2 variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{R}$, que $M_n = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice aléatoire à valeurs dans $\mathcal{V}_{n,n}$ dont, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient situé à la ligne i et la colonne j est égal à $m_{i,j}$.

On note

$$C_1 = \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, C_n = \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix}$$

les variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{V}_{n,1}$ constituées par les colonnes de la matrice M_n.

Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, on note R_j l'événement

$$(C_1, \dots, C_j) \text{ est libre et } C_{j+1} \in \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_j)$$

et R_n l'événement

$$(C_1, \dots, C_n) \text{ est libre.}$$

Q 28. Montrer que $(R_1, \ldots, R_n)$ est un système complet d'événements.

II.D.3)

Q 29. Montrer que

$$\mathbb{P}\big(M \notin \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})\big) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(C_{j+1} \in \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_j)\big).$$

Q 30. Justifier que, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\mathbb{P}\big(C_{j+1} \in \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_j)\big) = \sum_{(v_1,\ldots,v_j)\in \mathcal{V}_{n,1}^j} \mathbb{P}\big(C_{j+1} \in \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_j)\big)\mathbb{P}\big((C_1 = v_1) \cap \cdots \cap (C_j = v_j)\big).$$

Q 31. En déduire que, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\mathbb{P}\big(C_{j+1} \in \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_j)\big) \leqslant 2^{j-n}.$$

Q 32. En déduire que

$$\mathbb{P}\big(M \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})\big) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

III Un autre procédé de construction de matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$

Soit $p \in]0, 1[$. On définit une suite (A_k) de matrices aléatoires d'ordre n à coefficients dans $\{-1, 1\}$ selon le procédé suivant :

— on note A_0 la matrice réelle d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ;

— pour tout entier naturel k, on construit la matrice A_{k+1} à partir de la matrice A_k en conservant chaque coefficient de A_k égal à -1 et en changeant en -1 avec la probabilité p chaque coefficient de A_k égal à 1. Chaque coefficient égal à 1 a donc la probabilité $q = 1 - p$ de ne pas être modifié ;

— le processus s'arrête quand la matrice obtenue est égale à $-A_0$.

On suppose avoir utilisé l'instruction

```
import numpy as np, numpy.random as rd
```

pour charger les bibliothèques `numpy` et `numpy.random`. Voici quelques fonctions de ces bibliothèques qui peuvent être utiles dans cette partie :

— `np.ones((n,n))` crée un tableau `numpy` de taille $n \times n$ dont tous les éléments valent 1 ;

— `A.shape` est un tuple qui contient les dimensions du tableau `A` ;

— `A.size` donne le nombre total d'éléments du tableau `A` ;

— `A.sum()` renvoie la somme de tous les éléments du tableau `A` ;

— `rd.binomial(1, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.

Q 33. Écrire en Python une fonction `modifie_matrice(p, A)` qui prend en argument une probabilité p et un tableau `numpy` représentant une matrice $A \in \mathcal{V}_{n,n}$. Cette fonction modifie le tableau a selon le procédé décrit ci-dessus.

Q 34. En utilisant la fonction précédente, écrire en Python une fonction `nb_tours(p, n)` qui prend en argument une probabilité p et l'ordre n des matrices A_k et renvoie le plus petit entier k tel que $A_k = -A_0$, en partant de la matrice A_0.

Q 35. Écrire en Python une fonction `moyenne_tours(p, n, nbe)` qui prend en argument une probabilité p, l'ordre n des matrices A_k et un nombre entier `nbe` et qui renvoie la moyenne, sur `nbe` essais effectués, du nombre d'étapes nécessaires pour passer de A_0 à $-A_0$.

IV Vecteurs aléatoires unitaires

On suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On désigne par I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ ayant au moins deux éléments et par $u = (u_i)_{i\in I}$ une suite de vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q 36. Démontrer que le nombre réel

$$C(u) = \sup\left\{|\langle u_i \mid u_j\rangle|\,,\, (i,j)\in I^2,\, i\neq j\right\}$$

existe et appartient à l'intervalle $[0,1]$.

$C(u)$ s'appelle paramètre de cohérence de la suite $(u_i)_{i\in I}$.

Q 37. Montrer que si $C(u) = 0$, alors l'ensemble $\{u_i,\, i\in I\}$ est fini et donner un majorant de son cardinal.

On se propose de démontrer que, pour tout entier naturel N inférieur ou égal à $\exp\left(\dfrac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille u de N vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $C(u) \leqslant \varepsilon$ où ε est un nombre réel de l'intervalle $[0,1]$. On dit alors que u est une famille « presque orthogonale ».

Q 38. Démontrer que, pour tout nombre réel t, $\operatorname{ch}(t) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

Soient $X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{R}$ (définie dans la sous-partie II.B). On définit les vecteurs aléatoires, $X = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1,\dots,X_n)^\top$ et $Y = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(Y_1,\dots,Y_n)^\top$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q 39. Démontrer que, pour tout nombre réel t,

$$\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X \mid Y\rangle)\big) = \left(\operatorname{ch}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.$$

Q 40. En déduire que, pour pour tout nombre réel t,

$$\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X \mid Y\rangle)\big) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

Soient σ et λ deux nombres réels strictement positifs et Z une variable aléatoire réelle telle que $\exp(tZ)$ est d'espérance finie et vérifie

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad \mathbb{E}\big(\exp(tZ)\big) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Q 41. En appliquant l'inégalité de Markov à une variable aléatoire bien choisie, démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathbb{P}(Z \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \lambda t\right).$$

Q 42. En déduire que

$$\mathbb{P}(|Z| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$

Q 43. Avec les notations et les hypothèses de la question 39 , démontrer que

$$\mathbb{P}(|\langle X \mid Y\rangle| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

N étant un entier naturel non nul, $\left(X_j^i\right)_{1\leqslant i\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant n}$ est une famille de $n \times N$ variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{R}$. Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on pose $X^i = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1^i, \ldots, X_n^i)^\mathsf{T}$.

Q 44. Déduire des questions précédentes que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant N(N-1)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

Q 45. On suppose que $n \geqslant 4\dfrac{\ln N}{\varepsilon^2}$. Démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geqslant \varepsilon\right) < 1.$$

Q 46. En déduire que, pour tout entier naturel N inférieur ou égal à $\exp\left(\dfrac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille de N vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ dont le paramètre de cohérence est majoré par ε.

• • • FIN • • •