Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème : Approximation polynômiale uniforme de la valeur absolue sur $[-1,1]$

Résultats admis : $\boxed{\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-t^2}\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ et on note alors } \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

A - Quelques résultats préliminaires

A-1 Pour $b \in \mathbf{R}^+$, calculer $\displaystyle\int_0^b t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t$. En déduire que $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_0^b t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

A-2 Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1-e^{-t^2}}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et se prolonge par continuité en 0.

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\left(\lim_{a\to0}\int_a^b \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\mathrm{d}t\right) = \sqrt{\pi}$.

On note alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

A-3 (a) Justifier que pour tout réel $x>0$, $\quad \ln(x) \leqslant x-1$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $u \in [0,n]$, $\quad e^{-u} - \left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n \geqslant 0$.

A-4 (a) Justifier que pour tout réel x, $\quad e^x \geqslant x+1$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $t \in [0,1]$ $\quad (1-t)^n\, e^{nt} \geqslant (1-t^2)^n$.

(c) Montrer que tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $t \in [0,1]$ $\quad (1-t^2)^n \geqslant 1-nt^2$.

(d) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $u \in [0,n]$ $\quad e^{-u} - \left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant \dfrac{u^2e^{-u}}{n}$.

B-Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n et tout réel α, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\mathrm{d}t; \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \text{ si } n \geqslant 1 \text{ et } \binom{\alpha}{0} = 1$$

B-1 (a) Calculer I_0 et I_1 et justifier que $I_n > 0$ pour tout n de $\mathbf{N}$.

(b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \geqslant 2 \quad nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

(c) En déduire que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\geqslant1}$ est constante de valeur $\dfrac{\pi}{2}$.

B-2 (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

(b) Déduire de ce qui précède l'encadrement $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, valable pour $n \geqslant 1$.

B-3 (a) En utilisant la question B-1(b), montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ $\quad I_{2n} = \dfrac{\pi}{2}.\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

(b) Dans la suite on pose $\lambda_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $0 \leqslant 1 - \lambda_n\sqrt{n\pi} \leqslant \dfrac{1}{4n}$.

(c) En déduire un équivalent de λ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

C- Une suite de polynômes approchant uniformément la fonction valeur absolue sur $[-1,1]$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $P_n = \lambda_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{1}{2k-1}X^{2k}$.

C-1 (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-(1-t^2)^n}{t^2}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0.

On s'autorise alors à noter $\displaystyle\int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}dt$ *pour tout* $x \in]0,1]$.

(b) Montrer que pour tout $(n,x) \in \mathbf{N}^*\times]0,1]$ $\quad P_n(x) = \lambda_n x \displaystyle\int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}\mathrm{d}t$.

(c) En déduire que pour tout $(n,x) \in \mathbf{N}^*\times]0,1]$ $\quad P_n(x) = \lambda_n\sqrt{n}\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(\frac{1-\left(1-\frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}\right)\mathrm{d}u$.

C-2 Soit x un réel non nul, montrer que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\mathrm{d}u = \lim_{b\to+\infty}\left(\lim_{a\to0}\int_a^b\frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\mathrm{d}u\right) = |x|\sqrt{\pi}$$

C-3 Soient un entier $n \geqslant 1$ et $x \in]0,1]$; on pose

$$\Delta_n(x) = \int_0^{\sqrt{n}}\left(\frac{1-\left(1-\frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}\right)\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \Delta(x) = \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\mathrm{d}u$$

(a) Vérifier que $P_n(x) - x = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\lambda_n\sqrt{n\pi}\Delta_n(x) - \Delta(x)\right)$ et montrer que

$$|P_n(x) - x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\left(\frac{1}{4n}+1\right)|\Delta_n(x)-\Delta(x)| + \frac{1}{4n}\Delta(x)\right)$$

(b) Montrer que

$$|\Delta_n(x)-\Delta(x)| \leqslant \int_0^{\sqrt{n}}\left(\frac{e^{-u^2x^2}-\left(1-\frac{u^2x^2}{n}\right)^n}{u^2}\right)\mathrm{d}u + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\left(\frac{1-e^{-u^2x^2}}{u^2}\right)\mathrm{d}u \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{4n}+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

(c) Montrer alors que $\underset{-1\leqslant t\leqslant 1}{Sup} |P_n(t) - |t|| \leqslant \left(\frac{1}{4n}+1\right)\left(\frac{1}{4n}+\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right)+\frac{1}{4n}$.

(d) Conclure que la suite de fonctions $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur le segment $[-1, 1]$ vers la fonction $h : t \mapsto |t|$ et que $\|P_n - h\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ où $\|P_n - h\|_\infty = \underset{-1\leqslant t\leqslant 1}{Sup} |P_n(t) - |t||$.

Exercice : Etude des séries oscillantes

Soit d un entier, $d \geqslant 2$. Soit $\omega = (\omega_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes, périodique de pédiode d, c'est-à-dire telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \omega_{n+d} = \omega_n$$

Dans cet exercice, on s'intéresse à la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n(\lambda)$ de terme général

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n(\lambda) = \frac{\omega_n + \lambda}{n}$$

où λ est un complexe. On note plus simplement $u_n = u_n(0)$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Supposons, dans cette question uniquement, qu'il existe un complexe λ tel que $\sum u_n(\lambda)$ converge. Montrer que, pour toute valeur $\mu \neq \lambda$, la série $\sum u_n(\mu)$ diverge.

2. Dans cette question, on choisit $\lambda = 0$.
   Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n la somme partielle associée à la série $\sum u_n$, c'est-à-dire $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k}{k}$.

   (a) Pour tout entier naturel m, exprimer $\frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k}$ en fonction de $\Omega = \sum_{k=1}^{d} \omega_k$.

   (b) Déterminer un réel α tel que

   $$S_{(m+1)d} - S_{md} = \frac{1}{md+1}\sum_{k=1}^{d} \omega_{md+k} + \frac{\alpha}{m^2} + \underset{m\to\infty}{o}\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur Ω pour que la série $\sum \left(S_{(m+1)d} - S_{md}\right)$ converge.

   (d) Montrer *très soigneusement* que la condition obtenue à la question précédente est une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum u_n$ converge.

   (e) Montrer qu'il existe une unique valeur $\lambda \in \mathbf{C}$ telle que la série $\sum u_n(\lambda)$ converge.

3. **Une généralisation** Dans cette question, on se donne une suite croissante $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels, telle que $a_1 > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. On suppose que $\Omega = 0$. On pose, pour tout n$\geqslant 1$,

   $$u_n = \frac{\omega_n}{a_n} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$$

   Par soucis de commodité, on note également $T_0 = 0$.

(a) Montrer que la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} T_k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) + \frac{T_n}{a_{n+1}}$$

(c) Montrer que la série $\sum T_k \left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}} \right)$ converge.

(d) Montrer que la série $\sum u_k$ converge.

Fin de l'énoncé