Dans ce chapitre $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et E désigne un $\mathbf{K}$-espaces vectoriel.

1 Normes et distance associée

Remarque 1.1
Si A est une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{R}^+$ alors $Sup(kA) = kSup(A)$.

1.1 Normes

Definition 1.1 *Norme*
On appelle norme sur l'espace E, toute application N définie sur E qui vérifie :

- $\forall x \in E, \quad N(x) \in \mathbf{R}^+$ *positivité*
- $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$ *(séparation)*
- $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \forall x \in E, \quad N(\lambda x) = |\lambda|.N(x)$ *(homogénéité)*
- $\forall (x,y) \in E^2, \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire)*

(E, N) est alors appelé un espace vectoriel normé. S'il n'y a pas d'ambiguité sur la norme, on dit que E est un espace vectoriel normé, et on préfèrera souvent la notation $\|x\|$ à $N(x)$.

Proposition 1.1 *Inégalités triangulaire et triangulaire inverse*
Pour toute norme $\|.\|$ sur E, on a :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \big| \ \|x\| - \|y\| \ \big| \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

Et on peut généraliser l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n \quad \forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n \quad \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^n |\alpha_k|.\|x_k\|$$

Proposition 1.2 *Norme associée à un produit scalaire*

Si $(.|.)$ est un produit scalaire sur E alors l'application $\|.\| : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbf{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{(x|x)} \end{array}$ est une norme, appelée norme associée au produit scalaire.

Exemple 1.1

L'application $\|.\|_2 : f \in C([a,b], \mathbf{R}) \mapsto \sqrt{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t}$ est une norme associée au produit scalaire $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ sur $C([a,b], \mathbf{R})$.

Proposition 1.3 *Norme de la convergence uniforme*

Soit $E = \mathcal{B}(I, \mathbf{K})$, espace vectoriel des fonctions bornées de I vers $\mathbf{K}$.
L'application $\|.\|_\infty : f \in E \mapsto \underset{x \in I}{Sup}|f(x)|$ est une norme sur E.

Proposition 1.4 *Normes usuelles sur $\mathbf{K}^n$*

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, on note :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|.$$

Les applications $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont trois normes sur $\mathbf{K}^n$ appelées normes usuelles sur $\mathbf{K}^n$.

1.2 Distance associée à une norme

Definition 1.2

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit $(x, y) \in E^2$, on appelle distance de x à y le nombre réel noté $d(x, y)$ défini par
$$d(x, y) = \|x - y\|$$
2. On appelle distance associée à la norme $\| \ \|$ l'application $d : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbf{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto & d(x, y) = \|x - y\| \end{array}$

Proposition 1.5

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé.
d la distance associée à la norme vérifie les propriétés :

• d est à valeurs dans $\mathbf{R}^+$

• $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \qquad$ *(séparation)*

• $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = d(y, x) \qquad$ *(symétrie)*

• $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \qquad$ *(inégalité triangulaire)*

Definition 1.3 *Boule ouverte - Boule fermée - Sphère*

On considère $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$.

• L'ensemble $B(a, r) = \{x \in E, \quad \|x - a\| < r\} = \{x \in E, \quad d(x, a) < r\}$ est appelé boule ouverte de centre a et de rayon r.

• L'ensemble $\overline{B}(a, r) = \{x \in E, \quad \|x - a\| \leqslant r\} = \{x \in E, \quad d(x, a) \leqslant r\}$ est appelé boule fermée de centre a et de rayon r.

• L'ensemble $S(a, r) = \{x \in E, \quad \|x - a\| = r\} = \{x \in E, \quad d(x, a) = r\}$ est appelé sphère de centre a et de rayon r.

Remarque 1.2

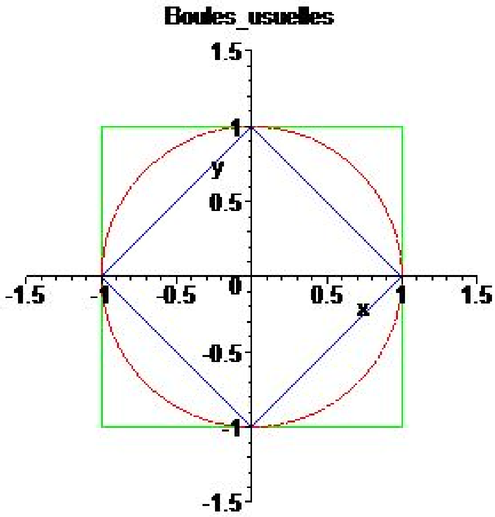
On appelle boule unité fermée la boule fermée de centre O et de rayon 1.
On appelle sphère unité $S(O,1)$ dont les éléments sont appelés vecteurs unitaires.

Exemple 1.2

- Soit $E = \mathbf{R}$ muni de la norme $|\quad|$ et $a \in E$ et $r > 0$, $B(a,r) =]a-r, a+r[$.

- Si $E = \mathbf{C}$ muni du module, soit $a \in E$ et $r \geqslant 0$, $\overline{B}(a,r)$ est le disque de centre a et de rayon r.

- Dans $\mathbf{R}^2$, dessin des boules unités pour les normes usuelles :



1.3 Parties convexes et bornées

Definition 1.4 *Partie convexe*

On dit qu'une partie A de l'espace vectoriel E est convexe lorsque

$$\forall (x,y) \in A^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad tx + (1-t)y \in A$$

Exemple 1.3

- Les intervalles sont les parties convexes de $\mathbf{R}$.
- L'ensemble des matrices stochastiques est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Proposition 1.6

Dans un espace vectoriel normé, toute boule (ouverte ou fermée) est convexe.

Definition 1.5 *Partie, suite, fonction bornées*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E et f une fonction définie sur I à valeurs dans E.

- On dit que A est bornée lorsqu'il existe une boule contenant A :

$$\exists M > 0 \quad \forall a \in A \quad \|a\| \leqslant M$$

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée lorsque $\{u_n, \quad n\in\mathbf{N}\}$ est une partie bornée de E :

$$\exists M>0 \quad \forall n\in\mathbf{N} \quad \|u_n\|\leqslant M$$

- La fonction f est bornée lorsque $f(I)$ est une partie bornée de E :

$$\exists M>0 \quad \forall t\in I \quad \|f(t)\|\leqslant M$$

Exemple 1.4

- Toute boule d'un espace vectoriel normé est bornée.
- Dans $E=C([0,1],\mathbf{R})$ on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $f_n(t)=\sqrt{n}t^n$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée pour la norme $\|.\|_\infty$ mais est bornée pour la norme euclidienne $\|.\|_2$.

2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Dans tout ce paragraphe $(E,\| \quad \|)$ désigne un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E.

Definition 2.1

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (*pour la norme* $\|.\|$) lorsqu'il existe $\ell\in E$ tel que la suite numérique $(\|u_n-\ell\|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, ce qui donne :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0, \quad \exists N\in\mathbf{N}, \quad \forall n\in\mathbf{N}, \quad n\geqslant N\Longrightarrow\|u_n-\ell\|\leqslant\varepsilon}$$

Lorsqu'une suite ne converge pas, on dit qu'elle est divergente.

Proposition 2.1 *Unicité de la limite*

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est unique notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Proposition 2.2

Toute suite convergente est bornée.

Exemple 2.1

1. La suite de fonctions (f_n) définie par $\forall x\in[0,1] \quad f_n(x)=x^n$, converge pour la norme $\|.\|_2$ mais pas pour la norme $\|.\|_\infty$.
2. La suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ où $\forall n\in\mathbf{N}^* \quad M_n=\begin{pmatrix}\frac{1}{n} & e^{-n}\\ \frac{n}{n+1} & 2^{-n}\end{pmatrix}$ converge pour la norme $\|M\|_\infty=\underset{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}{Max}|m_{i,j}|$.

Proposition 2.3

Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.

Proposition 2.4 *Opérations sur les limites*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de $E^{\mathbf{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de scalaires convergente.

1. La suite $(\|u_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et
$$\lim_{n\to+\infty}\|u_n\| = \|\lim_{n\to+\infty} u_n\|$$
2. La suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n$$
3. La suite $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et
$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda_n u_n) = \left(\lim_{n\in\mathbf{N}}\lambda_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)$$

2.1 Comparaison de normes

Definition 2.2 *Normes équivalentes*

Soient N_1 et N_2 deux normes sur le même espace vectoriel E. On dit que ces deux normes sont équivalentes lorsque :

$$\exists\alpha>0,\quad \exists\beta>0,\quad \forall x\in E,\quad \alpha N_1(x)\leqslant N_2(x)\leqslant\beta N_1(x)$$

Ce qui revient à dire : $\begin{cases}\exists a>0 & N_1\leqslant aN_2\\ \\ \exists b>0 & N_2\leqslant bN_1\end{cases}$.

Chaque norme est contrôlée par l'autre.

Proposition 2.5

Pour deux normes équivalentes, il y a invariance du caractère borné et de la convergence d'une suite (avec même limite).

Exemple 2.2

1. Les normes $\| \;\|_1$, $\| \;\|_2$, $\| \;\|_\infty$ précédemment définies sur $\mathbf{K}^n$, sont équivalentes deux à deux :
$$\boxed{\forall x\in\mathbf{K}^n,\quad \|x\|_\infty\leqslant\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant\sqrt{n}\|x\|_2\leqslant n\|x\|_\infty}$$
2. Les normes $\| \;\|_2$ et $\| \;\|_\infty$ sur $E=C^0([0,1],\mathbf{R})$ ne sont pas équivalentes.

Proposition 2.6 Admise

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de **dimension finie**.

Toutes les normes sur E sont équivalentes.

3 Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans tout ce paragraphe, $(E, \| \quad \|)$ désigne un espace vectoriel normé.

Definition 3.1 *Points intérieurs*

Soit A une partie de E
$x \in E$ est appelé point intérieur à A lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.

Definition 3.2 *Ouvert*

Soit A une partie de E.
On dit que A est un ouvert de E (*ou une partie ouverte*) lorsque chacun de ses points est intérieur à A :

$$\boxed{\forall a \in A, \quad \exists r > 0, \quad B(a, r) \subset A}$$

Exemple 3.1

Toute boule ouverte est un ouvert.

Proposition 3.1 *Réunion et intersection d'ouverts*

- Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.
- Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Remarque 3.1

Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas forcément un ouvert : $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[=$

Definition 3.3 *Fermé*

Soit F une partie de E.
On dit que F est un fermé lorsque son complémentaire ${}^cF = E \backslash F$ est un ouvert de E.

Proposition 3.2 *Intersection et réunion de fermés*

- Une intersection quelconque de fermés est un fermé.
- Toute réunion finie de fermés est un fermé.

Proposition 3.3 *Caractérisation séquentielle*

Soit F une partie de E.
F est un fermé si, et seulement si, la limite de toute suite convergente d'éléments de F appartient à F.

Exemple 3.2

- L'ensemble des matrices stochastiques est un fermé.
- Tout intervalle du type $]-\infty, a]$, $[a, b]$ ou $[a, +\infty[$ est un fermé de $\mathbf{R}$.

Definition 3.4 *Point adhérent - adhérence d'une partie*

Soit A une partie de E et soit $x \in E$.

1. On dit que x est un point **adhérent** à A lorsque toute boule ouverte non vide centrée en x rencontre A :

$$\boxed{\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset}$$

2. On appelle adhérence de A, notée $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A.

Proposition 3.4 *Caractérisation séquentielle de point adhérent*

Soit A une partie de E et soit $x \in E$.

x est adhérent à A **ssi** x est la limite d'une suite d'éléments de A.

Exemple 3.3

Montrer que la matrice nulle est un point adhérent à $GL_n(\mathbf{K})$.

Definition 3.5 *Partie dense*

Soit A une partie de E.
On dit que A est une partie dense lorsque $\overline{A} = E$.
Ce qui revient à : Tout élément x de E est limite d'une suite de points de A.

Exemple 3.4

1. Soit $x \in \mathbf{R}$, pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. En déduire que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$.
2. L'ensemble des matrices inversibles est une partie dense de l'espace vectoriel des matrices.

Remarque 3.2 *Topologie et normes équivalentes*

Toute les notions topologiques sont invariantes par passage à une norme équivalente.

Ce qui est particulièrement le cas en dimension finie.

4 Fonctions d'un EVN dans un EVN

Dans tout ce paragraphe, E et F désigne deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés, on notera $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ les normes respectives sur E et F, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

$f : \begin{array}{ccc} A \subset E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ désigne une application d'une partie A de E à valeurs dans F.

4.1 Limite d'une fonction en un point adhérent

Definition 4.1 *Limite en un point*

Soit a un point adhérent à A et soit ℓ un élément de F.
On dit que f admet ℓ pour limite en a lorsque :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad \|x-a\|_E \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leqslant \varepsilon}$$

Proposition 4.1 *Unicité de la limite*

Soit a un point adhérent à A et soit ℓ un élément de F.
Si f admet ℓ pour limite en a, alors ℓ est unique.

On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Remarque 4.1 *Extensions*

Lorsque $E = \mathbf{R}$, on peut avoir $a = +\infty$ ou $-\infty$ adhérent à A et on adapte la phrase précédente.

Lorsque $F = \mathbf{R}$, on peut parler de limite infinie de f en a :
$\forall M > 0 \quad \exists r > 0, \quad \forall x \in A, \quad \|x-a\|_E \leqslant r \Longrightarrow f(x) \geqslant M$ ou

$\forall M > 0 \quad \exists r > 0, \quad \forall x \in A, \quad \|x-a\|_E \leqslant r \Longrightarrow f(x) \leqslant -M$

Proposition 4.2 *Caractérisation séquentielle*

Soient $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$.

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \quad \left(\lim_{n \to +\infty} u_n = a \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell \right)}$$

Proposition 4.3 *Opérations algébriques*

E, F, G sont trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

- **Linéarité** :
  Soient $f : A \subset E \to F$, $g : A \subset E \to F$, $a \in \overline{A}$ et $(\ell_1, \ell_2) \in F^2$.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{x \to a} f(x) = \ell_1 \text{ et } \lim_{x \to a} g(x) = \ell_2 \text{ alors } \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \lim_{x \to a} (\lambda f + g)(x) = \lambda \ell_1 + \ell_2.}$$

- **Composition** :
  Soient $f : A \subset E \to F$, $g : B \subset F \to G$, $a \in \overline{A}$, $b \in F$ et $c \in G$. On suppose que $f(A) \subset B$.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{x \to a} f(x) = b \text{ (b est adhérent à B) et si } \lim_{y \to b} g(y) = c \text{ alors } \lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c.}$$

- **Cas particulier des applications à valeurs numériques** :
  Soient $f : A \subset E \to \mathbf{K}$, $g : A \subset E \to \mathbf{K}$, $a \in \overline{A}$ et $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbf{K}^2$.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = \ell_1 \text{ et } \lim_{x\to a} g(x) = \ell_2 \text{ alors } \lim_{x\to a} (fg)(x) = \ell_1\ell_2}$$

Definition 4.2 *Continuité en un point*

Lorsque $a \in A$ et que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, on dit que f est continue en a.

Proposition 4.4 *Caractérisation séquentielle*

Soit $a \in A$.

$$\boxed{f \text{ est continue en } a \textbf{ ssi } \forall (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \quad \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell \right)}$$

4.2 Continuité sur une partie

Definition 4.3 *Continuité sur une partie*

On dit que f est continue sur A lorsque pour tout $a \in A$ f est continue en a.

Proposition 4.5 *Opérations algébriques*

Soit E, F, G trois **K**-espaces vectoriels normés.

- $C(A, F)$ ensemble des fonctions continues sur A à valeurs dans F est un **K**-espace vectoriel.

- $C(A, \mathbf{K})$ ensemble des fonctions continues sur A et à valeurs numériques est une **K**-algèbre.

- Soient $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$ telles que $f(A) \subset B$.

  Si f est continue sur A et g est continue sur $f(A)$ alors $g \circ f$ est continue sur A.

Proposition 4.6 *Propriétés topologiques d'une application continue*

Soit $f : E \to F$.

1. Si f est continue sur E alors l'image réciproque d'un ouvert par f est un ouvert de E :
$$\forall U \text{ ouvert de } F \quad f^{-1}(U) = \{x \in E, \quad f(x) \in U\} \text{ est un ouvert de } E$$
2. Si f est continue sur E alors l'image réciproque d'un fermé par f est un fermé de E.

Exemple 4.1 *Cas particulier d'une application à valeurs réelles*

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } f : E \to \mathbf{R} \text{ est continue sur } E \text{ alors} \\[2ex] \{x \in E, f(x) > 0\} \quad \text{et} \quad \{x \in E, f(x) < 0\} \text{ sont des ouverts de } E, \\[2ex] \{x \in E, f(x) \geqslant 0\} \quad \text{et } \{x \in E, f(x) = 0\} \text{ sont des fermés de } E. \end{array}}$$

Definition 4.4 *Application lipschitzienne*

Soit $A \subset E$ et soit $f : A \to F$.
On dit que f est lipschitzienne sur A si et seulement si il existe un réel $k > 0$ tel que

$$\boxed{\forall (x,y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|}$$

Proposition 4.7

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$.

> Si f est une application lipschitzienne sur A alors f est continue sur A.

Exemple 4.2

Toute norme sur E est continue sur E.

5 Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension fini $p \in \mathbf{N}^*$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.

Si $(x_1, \ldots, x_p)$ sont les coordonnées d'un vecteur x de E dans cette base, on définit alors $x \mapsto \|x\|_\infty = Max(|x_1|, \ldots, |x_p|)$ est une norme sur E.

Proposition 5.1 **Admise**

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Remarque 5.1

La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie ne dépend pas de la norme choisie.

5.1 Caractérisation de la convergence par la convergence des coordonnées dans une base

Definition 5.1 *Suites coordonnées*

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbf{N}}$.
On décompose chaque vecteur u_n dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists (u_n^{(1)}, \ldots, u_n^{(p)}) \in \mathbf{K}^p \quad u_n = \sum_{k=1}^{p} u_n^{(k)} e_k$$

Les suites $(u_n^{(1)})_{n\in\mathbf{N}}, \ldots, (u_n^{(p)})_{n\in\mathbf{N}}$ sont appelées suites coordonnées de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Les suites coordonnées sont des suites à valeurs scalaires.

Proposition 5.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $(u_n^{(1)})_{n\in\mathbf{N}}, \ldots, (u_n^{(p)})_{n\in\mathbf{N}}$ ses suites coordonnées dans $\mathcal{B}$.

Si $\ell = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \ell_k e_k$, alors :

> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si $\forall k \in [\![1, p]\!] \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{(k)} = \ell_k$

Exemple 5.1

Soit D une matrice diagonale d'ordre p, donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite de matrices $(D^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Definition 5.2

Soit $f : A \subset E \to F$, avec F de dimension finie $q \in \mathbf{N}^*$ et $\mathcal{B}' = (h_1, \ldots, h_q)$ une base de F.

Pour tout $x \in A$, on décompose le vecteur $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\forall x \in A, \quad \exists!(f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in \mathbf{K}^p \quad f(x) = f_1(x)h_1 + f_2(x)h_2 + \ldots + f_q(x)h_q$$

$\forall i \in [\![1, q]\!]$, les fonctions scalaires $f_i : \begin{array}{l} A \longrightarrow \mathbf{K} \\ x \longmapsto f_i(x) \end{array}$ sont appelées les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Proposition 5.3 *Caractérisation par les coordonnées*

Soit $a \in \overline{A}$.
On suppose que F est de dimension finie $q \in \mathbf{N}^*$ et que $\mathcal{B}' = (h_1, \ldots, h_q)$ est une base de F.
On note $f_1, \ldots, f_p$ les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$.
Soit $\ell \in F$ que l'on décompose dans la base $\mathcal{B}'$: $\ell = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \ell_i h_i$.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \forall i \in [\![1, q]\!] \quad \lim_{x\to a} f_i(x) = \ell_i}$$

Proposition 5.4 *Théorème des bornes atteintes* **Admis**

Toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.

Proposition 5.5 *Continuité des applications linéaires et multilinéaires*

> **En dimension finie**, toute application linéaire est lipschitzienne donc continue.
>
> **En dimension finie** toute application multilinéaire est continue.

Exemple 5.2

1. L'application Trace est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. L'application $(A, B) \mapsto AB$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$.

Definition 5.3 *Applications polynômiales*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, et soit $f : E \longrightarrow \mathbf{K}$.

On dit que f est polynômiale sur E si f est une combinaison linéaire de produits des applications coordonnées p_i : $\begin{array}{c} E \longrightarrow \mathbf{K} \\ x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k e_k \mapsto x_i \end{array}$ pour $i \in [\![1, p]\!]$.

Proposition 5.6 *Continuité des applications polynômiales*

Toute fonction $f : E \longrightarrow \mathbf{K}$ polynômiale est continue sur E.

Exemple 5.3

1. L'application $det : M \mapsto det(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. L'application $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 + xz + y^3, x - z^3)$ est continue sur $\mathbf{R}^3$.