PSI - Épreuve de mathématiques - 4 heures

Exercice

Pour toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on note $L(f) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\mathrm{d}t$, *expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de f.*

On considère la fonction f définie sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ par $f(t) = \dfrac{1}{t}$.

Q 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. Rappeler le développement en série entière de la fonction $u \mapsto (1+u)^\alpha$, en précisant son domaine de validité.

Q 2. Montrer que pour tout $t \in]0,1[$, on a :

$$\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}t^{4n-2}$$

Q 3. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et donner un équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

Q 4. En déduire une expression de $L(f)$ comme somme d'une série numérique (on vérifiera avec soin les hypothèses du théorème utilisé).

PROBLÈME 1

Notations et définitions

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire d'espérance finie, on note $\mathbf{E}(X)$ cette espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $[-1,1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que X*. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée, ($\mathbf{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Q 5. On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X est d'espérance finie.

On suppose désormais que X est *centrée.*

Q 6. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire discrète Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Q 7. En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbf{P}\Big(|X| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \frac{\mathbf{E}\Big(|X|\Big)}{\alpha}.$$

Q 8. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbf{P}\left(S_n \geqslant \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\mathrm{e}^{tnS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tn\varepsilon}\right) \leqslant \frac{\left(\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\right)^n}{\mathrm{e}^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$.

Q26. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \frac{1-a}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbb{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geqslant 0$.

Q27. En déduire que

$$\forall t > 0,\ \forall x \in [-1, 1],\ \mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}.$$

Q 9. En déduire que

$$\forall t > 0,\ \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \operatorname{ch} t.$$

Q 10. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que

$$\forall t > 0,\ \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q30. Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp\left(-nt\varepsilon + n\dfrac{t^2}{2}\right)$ atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q31. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp\left(-n\dfrac{\varepsilon^2}{2}\right)$, puis que

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\exp\left(-n\frac{\varepsilon^2}{2}\right).$$

Conclusion

Q 11. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q 12. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geqslant n} \Big\{\omega \in \Omega\ ;\ |S_m(\omega)| > \varepsilon\Big\}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement et que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0$.

Q 13. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega \; ; \; \exists n \in \mathbb{N}^*, \; \forall m \geqslant n, \; |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un événement.

Écrire l'ensemble $A = \left\{\omega \in \Omega \, ; \, \lim\limits_{n\to\infty} S_n(\omega) = 0\right\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que A est un événement.

Q 14. Déduire des questions précédentes que $\mathbf{P}(A) = 1$.

PROBLÈME 2

Présentation Ce problème s'intéresse dans la **partie I** à des propriétés des matrices de rang 1. Certaines de ces matrices sont ensuite utilisées dans la **partie II** pour construire des matrices orthogonales permettant dans la **partie III** de prouver l'existence d'une factorisation QR pour une matrice carrée quelconque.

Notations
Pour tous n, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$: on note également A l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à X associe AX.
Pour tout $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, A^T désigne la matrice transposée de A.
Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que : $A^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$.
L'ensemble $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. En identifiant $\mathrm{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a pour tous $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y\rangle = X^T Y, \quad \text{et :} \quad \|X\|^2 = \langle X, X\rangle.$$

On suppose dans tout ce problème que $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel vérifiant $n \geqslant 2$.

Partie I – Matrices de rang 1

I.1 – Une expression des matrices de rang 1

Q 15. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe X, et Y dans $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ telles que : $A = XY^T$.

Q 16. Réciproquement, soient X, et Y dans $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. Montrer que la matrice XY^T est de rang 1.

I.2 – Quelques propriétés

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

Q 17. Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.

Q 18. En déduire, par récurrence sur k, une expression de A^k en fonction de A pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Q 19. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit nilpotente.

Q 20. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit diagonalisable.

Partie II – Matrices de Householder

II.1 – Un exemple

On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Q 21. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A.

Q 22. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Q 23. Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.

Q 24. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, telles que : $P^T AP = D$.

Q 25. Interpréter géométriquement l'endomorphisme A de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

II.2 – Matrices de Householder

Soit $V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. On définit P_V, $Q_V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$P_V = \frac{1}{\|V\|^2} VV^T, \qquad \text{et :} \qquad Q_V = \mathrm{I}_n - 2\frac{1}{\|V\|^2} VV^T. \tag{1}$$

Q 26. Montrer que $\mathrm{Im}(P_V) = \mathrm{Vect}(V)$ et que $\ker(P_V) = \mathrm{Vect}(V)^\perp$.

Q 27. Montrer que P_V est la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}(V)$.
Préciser le rang et la trace de la matrice P_V.

Q 28. Montrer que Q_V est symétrique et orthogonale.

Q 29. Montrer que Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(V)^\perp$.

Partie III – Factorisation QR

III.1 – Un résultat préliminaire

Soient $(U, V) \in (\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ tel que : $\|U\| = \|V\|$. On note : $D = \mathrm{Vect}(U - V)$.

Q 30. Montrer que $D^\perp$ est l'ensemble des $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|X - U\| = \|X - V\|$.

Q 31. Donner la décomposition de U sur la somme directe $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$.

Q 32. On suppose U et V non colinéaires. Calculer $Q_{U-V}U$ où Q_{U-V} est définie en (1).

Q 33. En déduire que pour tout $(\tilde{U}, \tilde{V})$ dans $(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ avec $\tilde{V} \neq 0$, il existe une matrice orthogonale Q, telle que $Q\tilde{U}$ soit colinéaire à $\tilde{V}$.

III.2 – Factorisation QR

Q 34. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1, telle que $Q_1 A$ soit de la forme :

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } C_1 \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Q 35. En raisonnant par récurrence sur n, montrer que pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale, telle que QA soit triangulaire supérieure.

FIN