Le candidat veillera à justifier ses démonstrations exclusivement à l'aide des outils du programme de la filière.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème : Un procédé de sommation

Notations.

Pour $z \in \mathscr{C}$, on note $|z|$ son module.
Pour tout entier naturel n, on note :

- $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$,
- $[\![0, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $0 \leq k \leq n$,
- (n_k) le nombre de parties ayant k élément d'un ensemble de n éléments, pour $k \in [\![0, n]\!]$.

On rappelle :

- la valeur de $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$,
- la formule du binôme : si z_1 et z_2 sont des nombres complexes et n un entier naturel, alors

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . z_1^k . z_2^{n-k}$$

Dans les parties I et II les notations utilisées sont les suivantes.
Toute application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{C}$ étant une suite complexe, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a(n) = a_n$.
A toute suite complexe a, on associee la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

L'objet des parties I et II est de comparer les propriétés de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n$.

Partie I : Deux exemples

I.1. **Cas d'une suite constante.**
Soit $\alpha \in \mathbf{C}^*$; on suppose que la suite a est définie par $\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = \alpha$.

I.1.1. Expliciter $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbf{N}$.

I.1.2. Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbf{N}$.

I.1.3. La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ (resp. $\sum_{n\geq 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

I.2. **Cas d'une suite géométrique.**

Soit $z \in \mathbf{C}$; on suppose que la suite a est définie par : $\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = z^n$.

I.2.1. Exprimer a_n^* en fonction de z et n.

I.2.2. On suppose que $|z| < 1$.

1.2.2.1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

1.2.2.2. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

I.2.3. On suppose que $|z| \geq 1$.

I.2.3.1. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$?

I.2.3.2. Quelle est la nature de $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?

I.2.3.3. On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$.

Partie II : Étude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que a est à valeurs réelles.

II.1. **Comparaison des convergences des deux suites :**

II.1.1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on considère une entier k fixé, $k \in [\![0, n]\!]$.

II.1.1.1. Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.1.2. En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.2. Soit a une suite réelle et q un entier naturel <u>fixé</u>.

On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n,a) = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n,a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

II.1.3. On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.4. On suppose que a_n tend vers ℓ (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

II.1.5. La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

II.2. **Comparaison des convergences des séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$:**

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

II.2.1. Pour $n \in [\![0,3]\!]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, c'est à dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k$.

II.2.2.1. A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question $II.2.1$?

II.2.2.2. Etablir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$).

II.2.3. On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

II.2.4. La convergence de la série $\sum a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum a_n^*$?

Exercice 1 : Algèbre linéaire

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, α un réel strictement négatif et u un endomorphisme de E tel que : $u \circ u = u^2 = \alpha Id_E$

.

1. (a) Montrer que (u, Id_E) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

   (b) On note $\mathcal{L}_u$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par u et Id_E.
   Montrer que : $\forall (f,g) \in \mathcal{L}_u \times \mathcal{L}_u, \quad f \circ g \in \mathcal{L}_u$.

2. (a) a étant un vecteur non nul de E, montrer que $(a, u(a))$ est une famille libre.

   (b) Montrer que $F_a = Vect(a, u(a))$ est stable par u.

   (c) Soit G un sous-espace vectoriel de E stable par u.
   Montrer que si a n'appartient pas à G alors $G \cap F_a = \{0\}$.

3. (a) Montrer qu'il existe p vecteurs non nuls $a_1, \ldots, a_p$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_{a_i}$.
   En déduire que E est de dimension paire.

   (b) Quelle est la forme de la matrice de u dans une base de la forme $(a_1, u(a_1), \ldots, a_p, u(a_p))$ adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_{a_i}$?

Exercice 2 : Uniquement pour les 5/2

Dans tout l'exercice, A est une matrice 2x2 à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

1. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   i) A est inversible et A^{-1} est à coefficients dans $\mathbf{Z}$. ii) $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

2. Dans la suite on suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $A^p = I_2$.
   Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, inversible, avec A^{-1} à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

3. Montrer que toute valeur propre de A est de module 1.

4. Montrer que le polynôme caractéristique de A appartient à un ensemble fini.

5. Soit $E_a = \left\{k \in \mathbf{N}^* : A^k = I_2\right\}$.
   Montrer que E_a admet un plus petit élément p_a.
   Exprimer E_a en fonction de p_a.

Fin de l'énoncé