Le candidat veillera à justifier ses démonstrations exclusivement à l'aide des outils du programme de la filière.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les 3/2 doivent traiter en priorité les exercices 1 et 2.
Les 5/2 peuvent au choix traiter en priorité l'exercice 3 ou les exercices 1 et 2.

Exercice n°1 : Réduction et matrice par blocs

Partie I :
On considère A, B, C et D des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ telles que C et D commutent.

1. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC). \tag{1}$$

2. Montrer l'égalité (**??**) dans le cas où D est inversible.

3. On ne suppose plus D inversible. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $p \geqslant p_0$, la matrice $D + \dfrac{1}{p} I_n$ soit inversible.

4. **Les 5/2 doivent traiter la question, les 3/2 admettent le résultat.**
   En déduire que l'égalité (**??**) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

Considérons une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et formons la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbf{C}).$$

5. Montrer que $\mathrm{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbf{C}; \mu^2 \in \mathrm{Sp}(M)\}$.

6. Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(N)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ \mu X \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.

7. Montrer que si M est diagonalisable et inversible, alors N est également diagonalisable et inversible.

Partie II : Application à un système différentiel dans le cas où $n = 2$

On considère le système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'' & = & -2x_1 + x_2, \\ x_2'' & = & x_1 - 2x_2. \end{array}\right. \tag{2}$$

8. Justifier que le système (**??**) est équivalent au système différentiel du premier ordre $X' = BX$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ M & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbf{R})$ et $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

9. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathrm{M}_2(\mathbf{R})$.

10. En utilisant la question **??**, déterminer les valeurs propres de B et en déduire que B est diagonalisable.

On considère la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

11. En utilisant la question **??**, déterminer une matrice inversible $P \in \mathrm{M}_4(\mathbf{C})$ dont la première ligne ne comporte que des 1 et telle que $B = PDP^{-1}$.

12. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel $Y' = DY$, avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

13. Déterminer la solution du système différentiel (**??**) avec conditions initiales $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_1'(0) \\ x_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 : Endormophismes d'un espace fonctionnel

Pour tout entier naturel n, on note $e_n \ : \ x \in \mathbf{R}^+ \mapsto x^n e^{-x}$.

Soient $N \in \mathbf{N}^*$ et E le sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ défini par $E = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_N)$.

14. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_N)$ est une base de E. En déduire la dimension de E.

15. Pour tout élément g de E, on note $\Delta(g) = g'$.

(a) Démontrer que $\Delta \in \mathcal{L}(E)$.

(b) Ecrire la matrice A de Δ dans la base $\mathcal{B}$. Δ est-il un automorphisme de E ?

(c) Déterminer les éléments propres de Δ. L'endomorphisme Δ est-il diagonalisable ?

16. Justifier que la série de terme général $n^k e^{-n}$ pour tout k fixé de $\mathbf{N}$ est convergente.
On note alors
$$A_k = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k e^{-n}$$

17. Soient $k \in [\![0, N]\!]$ et $x \geq 0$. Montrer que la série de terme général $w_n = e_k(x+n)$ est convergente.

18. (a) Pour tout entier naturel k, on considère une suite $(u_{n,k})_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_{n,k}$ converge.
Citer le théorème du cours qui justifie que l'on a, pour tout $N \in \mathbf{N}$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{N} u_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}\right)$$

(b) Soit $f \in E$. Démontrer que la série de terme général $u_n = f(n+x)$ est convergente pour tout $x \geq 0$. On note alors
$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+x)$$

(c) Exprimer $F(x)$ en fonction des A_j pour tout $x \geq 0$ (A_j défini en question **??**).

(d) En déduire que $F \in E$ et que l'application $\Phi \ : \ f \mapsto F$ ainsi définie est un endomorphisme de E.

19. Ecrire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des A_j. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 3 : Matrices carrées d'ordre 2 de trace nulle

- n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- On note $\mathbf{K}$ le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.
- On note respectivement $\mathcal{M}(n, \mathbf{K})$, $GL(n, \mathbf{K})$, $\mathcal{D}(n, \mathbf{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$, le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}(n, \mathbf{K})$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(n, \mathbf{K})$ formé des matrices diagonales.
- On désigne par $\mathcal{M}_0(n, \mathbf{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}(n, \mathbf{K})$ de trace nulle.

- On note I_n la matrice identité et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}(n, \mathbf{K})$.
- On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}(n, \mathbf{K})$ est **nilpotente** s'il existe un entier naturel non nul r tel que $A^r = 0$. De la même manière, on dit qu'un endomorphisme f est **nilpotent** s'il existe un entier naturel non nul r tel que $f^r = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{r \text{ fois}} = 0$.
- Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}(n, \mathbf{K})$, le crochet $[A, B]$ est défini par
$$[A, B] = AB - BA$$
- Pour tout $A \in \mathcal{M}(n, \mathbf{K})$, on définit l'endomorphisme
$$\Phi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(n, \mathbf{K}) & \to & \mathcal{M}(n, \mathbf{K}) \\ B & \mapsto & [A, B] \end{array}$$
- On dit qu'un triplet (X, H, Y) de trois matrices non nulles de $\mathcal{M}(n, \mathbf{K})$ est un **triplet admissible** si les trois relations suivantes sont vérifiées :
$$[H, X] = 2X \quad ; \quad [X, Y] = H \quad ; \quad [H, Y] = -2Y$$

On pose :
$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

20. *Généralités*

    (a) Montrer que $\mathcal{M}_0(n, \mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ; en préciser la dimension.

    (b) Justifier que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}(n, \mathbf{K})$, la matrice $[A, B]$ appartient à $\mathcal{M}_0(n, \mathbf{K})$.

21. *Un isomorphisme*
    Montrer que l'application
$$j : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^3 & \to & \mathcal{M}_0(2, \mathbf{K}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix} \end{array}$$
    est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

22. *Caractérisation des matrices nilpotentes*

    Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_0(2, \mathbf{K})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

    i) La matrice A est nilpotente ;
    ii) Le spectre de A est égal à $\{0\}$;
    iii) La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

23. *Le cas complexe*

    On suppose dans cette question que **K** est égal à **C**.

    (a) Montrer que deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbf{C})$ sont semblables si, et seulement si, elles ont le même polynôme caractéristique.

    (b) Ce résultat reste-t-il vrai pour deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(3, \mathbf{C})$?

24. *Le cas réel*

    On suppose dans cette question que **K** est égal à **R**.

    (a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_0(2, \mathbf{K})$. On suppose que son polynôme caractéristique vaut $X^2 + r^2$, où r est un réel non nul.

       I) Justifier l'existence d'une matrice $P \in GL(2, \mathbf{C})$ vérifiant : $irH_0 = P^{-1}.A.P$. Que vaut la matrice $A^2 + r^2 I_2$?

       II) Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à la matrice A, c'est-à-dire qui à un vecteur colonne u de $\mathbf{R}^2$ associe le vecteur Au.
       Soit ω un vecteur non nul de $\mathbf{R}^2$.
       Prouver que la famille $\left(\frac{1}{r} f(\omega), \omega\right)$ est une base de $\mathbf{R}^2$, et donner la matrice de f dans cette base.

    (b) Montrer que deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbf{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}(2, \mathbf{R})$ si, et seulement si, elles ont le même polynôme caractéristique.

25. *Un lemme*

    Soient A, B et M trois éléments de $\mathcal{M}_0(2, \mathbf{K})$.

    (a) Exprimer la trace de la matrice M^2 en fonction du déterminant de M.

    (b) Démontrer que la matrice M est nilpotente si, et seulement si, la trace de la matrice M^2 est nulle.

    (c) On suppose que les matrices A et $[A, B]$ commutent.
    Démontrer que la matrice $[A, B]$ est nilpotente.

26. *Description des triplets admissibles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbf{K})$*

    (a) Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}(2, \mathbf{K})$ qui commutent avec X_0.
    Quelles sont les matrices M de $\mathcal{M}_0(2, \mathbf{K})$ qui commutent avec X_0 ?

(b) Soit P une matrice de $GL(2, \mathbf{K})$. Vérifier que $(PX_0P^{-1}, PH_0P^{-1}, PY_0P^{-1})$ est un triplet admissible.

On se propose de démontrer que, réciproquement, tous les triplets admissibles de $\mathcal{M}_0(2, \mathbf{K})$ sont de cette forme.

Pour toute la suite de la question **??**, soient X, H, Y trois éléments de $\mathcal{M}_0(2, \mathbf{K})$ tels que (X, H, Y) forme un triplet admissible.

(c) Montrer en utilisant les questions **??** et **??** qu'il existe une matrice $Q \in GL(2, \mathbf{K})$ vérifiant $X = Q.X_0.Q^{-1}$.

On fixe pour la suite de la question **??** une telle matrice $Q \in GL(2, \mathbf{K})$.

(d) On définit les vecteurs $u = Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

I) En calculant le vecteur $[H, X]u$ de deux manières différentes, démontrer que u est un vecteur propre de la matrice H.

II) En calculant le vecteur $[H, X]v$ de deux manières différentes, prouver l'existence d'un scalaire t vérifiant l'identité : $H = Q \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

III) Trouver une matrice $T \in GL(2, \mathbf{K})$ commutant avec X_0 et vérifiant la relation $H = QTH_0(QT)^{-1}$.

On pose désormais $P = QT$.

(e) Soit $Y' \in \mathcal{M}_0(2, \mathbf{K})$ telle que (X, H, Y') soit un triplet admissible.

I) Déduire de la question 26(a) les matrices de $\mathcal{M}_0(2, \mathbf{K})$ qui commutent avec X.

II) Calculer les matrices $\Phi_X(Y - Y')$ et $\Phi_H(Y - Y')$.

III) En déduire que l'on a $Y = Y'$.

(f) Démontrer l'identité $(X, H, Y) = (PX_0P^{-1}, PH_0P^{-1}, PY_0P^{-1})$.

Fin de l'énoncé