Le candidat veillera à justifier ses démonstrations exclusivement à l'aide des outils du programme de la filière.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 : Calcul d'intégrales

1. Soit f une fonction continue sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.
   Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

2. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

   2.1 Calculer I_0 et I_1.

   2.2 Pour $n \geqslant 2$, donner une relation entre I_n et I_{n-2}.

   2.3 En déduire I_{2n+1} et I_{2n} en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

3. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}$ est intégrable sur $]0,1[$.
   Puis calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = 2x-1$.

Exercice 2 : Produit scalaire et polynômes orthogonaux

On désigne par $E = \mathbf{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels et par $E_N = \mathbf{R}_N[X]$ le sous-espace de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à N. On pourra identifier E à l'ensemble des applications polynomiales de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$.

4. Justifier rapidement que $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2 \quad |ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

5. Soit F l'ensemble des applications f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$, telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^2.e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

   5.1 Justifier que pour f et g dans F $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t).g(t).e^{-t}\mathrm{d}t$ existe.

   5.2 En déduire que F est un espace vectoriel réel.

   5.3 Justifier que l'application définie sur F^2 par :

   $$\forall (f,g) \in F^2, \quad \langle f,g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t).g(t).e^{-t}\mathrm{d}t$$

   est un produit scalaire sur F

5.4 Préciser pourquoi F contient les applications polynomiales de $\mathbf{R}^+$ vers $\mathbf{R}$, permettant ainsi de munir E d'un produit scalaire, par restriction de $\langle\,,\,\rangle$ à E^2.

6. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit $h_n : x \mapsto x^n.e^{-x}$ et $Ln : x \mapsto \dfrac{e^x}{n!}.h_n^{(n)}(x)$ c'est à dire :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}.\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n.e^{-x}\right)$$

6.1 Justifier que L_n est dans E, avec L_n de degré n.
(On pourra utiliser la formule de Leibniz pour calculer $h_n^{(n)}(x)$).
Préciser le coefficient de X^n dans L_n.

6.2 Soit g dans E ; montrer que $\langle g, L_n\rangle = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t).t^n.e^{-t}\mathrm{d}t$.

6.3 En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale de $(E, \langle\,,\,\rangle)$, et que, par suite, pour tout entier N, la famille $(L_n)_{n\in[0,N]}$ est une famille orthogonale de $(E_N, \langle\,,\,\rangle)$

6.4 Préciser la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n.e^{-t}\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbf{N}$.

6.5 Préciser $\langle L_n, L_n\rangle$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

7. D'après 2.c., si on pose pour g dans F : $\| g \| = \sqrt{\langle g, g\rangle}$, on peut dire que $(F, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

7.1 Soit $n \in \mathbf{N}$ et $U_n : g \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t).t^n.e^{-t}\mathrm{d}t$. L'application U_n est visiblement linéaire sur F. Démontrer que

$$\forall g \in F \quad |U_n(g)| \leq \|g\|\sqrt{(2n)!}$$

et en déduire la valeur de $\lambda = \sup\limits_{g\neq 0}\left(\dfrac{|U_n(g)|}{\|g\|}\right)$.

7.2 Pour tout g dans F et n dans $\mathbf{N}$, on note $\widehat{g}(n)$ le produit scalaire $\langle g, L_n\rangle$. Soit N dans $\mathbf{N}$ et p_N projection orthogonale, au sens du produit scalaire $\langle\,,\,\rangle$ sur le sous-espace E_N de F.

Démontrer que, pour g dans F, $p_N(g) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\widehat{g}(n)L_n$ puis que $||p_N(g)||^2 \leq ||g||^2$.

En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}}[\widehat{g}(n)]^2$.

8. Pour a dans $\mathbf{R}^+$, on note $\phi_a : x \mapsto e^{-ax}$, application de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$.

8.1 Justifier que $\phi_a \in F$ et calculer $\langle \phi_a, L_n\rangle$ pour n dans $\mathbf{N}$.

8.2 Justifier $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ||\phi_a - \sum_{k=0}^{n}\langle\phi_a, L_k\rangle.L_k|| = 0$

Exercice 3 : Intégrales généralisées

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbf{R}$.
Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\mathrm{d}t$, lorsque cela existe.

9. $\boxed{\textbf{Dans cette question, et uniquement cette question}, f \text{ est la fonction } t \mapsto \cos\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right).}$

   9.1 En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

   9.2 En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

   9.3 Donner alors un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.

10. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$.

11. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \displaystyle\int_a^x (\lambda - f(t))\mathrm{d}t$.

    11.1 Justifier que H_λ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et préciser $H'_\lambda(x)$.

    11.2 Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbf{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et que $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

12. <u>Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbf{R}$ et T-périodique</u> ($T > 0$).

    12.1 Démontrer que la fonction φ qui à tout réel x associe $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$ est constante.

    Montrer alors que l'on a, pour tout réel x : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

    12.2 Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

    12.3 Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbf{R}$.

    12.4 Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ converge.

    12.5 Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.

13. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\mathrm{d}t$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t}\mathrm{d}t$.

    13.1 Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n.

    13.2 Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$.

13.3 Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bornée.

13.4 On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.

13.4.1 Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question 4.

13.4.2 En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

Fin de l'énoncé