PSI - Samedi 2 décembre 2023

MATHEMATIQUES **SUJET 2**

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Exercice :

Q1. Soit f une fonction continue sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

Q2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

2.1 Calculer I_0 et I_1.

2.2 Pour $n \geq 2$, donner une relation entre I_n et I_{n-2}.

2.3 En déduire I_{2n+1} et I_{2n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Q3. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}$ est intégrable sur $]0,1[$.

Puis calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = 2x-1$.

Problème :

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$.

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties I et II.

Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on appelle fonction polynomiale sur I toute fonction de la forme $f : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$ où n est un entier naturel et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels.

I Résultats préliminaires

I.1 Étude d'une série entière

Pour tout réel x strictement positif, on pose :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Q4. Montrer que la fonction Γ est bien définie, et à valeurs strictement positives.

Q5. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Soit α un réel strictement supérieur à -1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

Q6. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

Q7. Montrer que pour tout $x \in\ ]-R, R[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}$.

On pourra effectuer une permutation des symboles $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty}$ *que l'on justifiera soigneusement.*

I.2 Projections orthogonales

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ pour tout $x \in E$.

Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E.

Q8. Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F.

On fixe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de F, et x un vecteur de E.

Q9. Montrer que $\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$.

II Polynômes de Laguerre

Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ est convergente.

Q10. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

Q11. En déduire que, si $(f, g) \in E_\alpha^2$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx$ est convergente.

Q12. En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Q13. Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α.

Pour tout entier naturel n, on définit les fonctions

$$\varphi_n :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto x^{n+\alpha} e^{-x}.$$

$$\psi_n :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto x^{-\alpha} e^{x} \varphi_n^{(n)}(x).$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

Q14. Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.

Q15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale.
Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élément de E_α, ce qu'on fera désormais.

Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx$.

Q16. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_α.

Dans la suite, on note $\|\cdot\|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par :

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha f(x)^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{pour } f \in E_\alpha.$$

Q17. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, établir que :

$$\varphi_n^{(k)}(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ par valeurs strictement positives,}$$

$$\text{et que } \varphi_n^{(k)}(x) = o(e^{-x/2}) \text{ quand } x \to +\infty.$$

Q18. Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx$.
En déduire que la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Q19. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n! \, \Gamma(n + \alpha + 1)$.
On rappelle que la fonction Γ a été définie dans la partie I.

III Approximation

On conserve les hypothèses et notations de la partie II. Pour tout entier naturel k, on définit la fonction $f_k : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-kx}$ qui est élément de E_α (on ne demande pas de le vérifier).

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note V_N le sous-espace vectoriel de E_α engendré par la famille finie $(\psi_n)_{0\leq n\leq N}$, et on note π_N la projection orthogonale de E_α sur V_N.

Q20. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$ et calculer sa valeur.

Q21. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \longrightarrow 0$ quand $N \to +\infty$.

Dans la suite, on note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E_α constitué des fonctions polynomiales.

Q22. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f_k - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$. Il est facile de vérifier (ce n'est pas demandé) que $f \in E_\alpha$.

Q23. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ ainsi que des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

On pourra utiliser la fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) \text{ si } t \in]0,1] \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$ *et le résultat admis suivant :* Si $\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0,1] \longrightarrow R$ telle que $|\phi(t) - p(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$.

Q24. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Q25. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ avec $A > 0$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x) e^{-x^2/2} \right)^2 dx \leq \varepsilon.$$

On pourra appliquer le résultat de la question 24) à $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto h(\sqrt{x})e^{x/2}$ *et à un* α *bien choisi.*

On peut montrer que le résultat de la question 25) est en réalité valable pour tout $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

Fin du sujet