51,5

Calculatrices non autorisées

Le candidat veillera à justifier ses démonstrations exclusivement à l'aide des outils du programme de la filière.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice : Fonctions de Bessel 17

Soit une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \int_0^\pi \cos\big(x\sin(t)\big)\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t.$$

0,5 **1.** Montrer que f est bien définie sur $\mathbf{R}$.

C^2 — int. — C^0 — domin.
0,5 + 0,5 + 0,5 + 1 + 1 → résultat.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

3. Soit une fonction $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R}^2, \quad h(x,t) = \cos(t)\sin\big(x\sin(t)\big).$$

Justifier l'existence de $\dfrac{\partial h}{\partial t}$, puis déterminer $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbf{R}^2$.
1 1

4. En déduire que f est solution de l'équation différentielle :

2 $$xy'' + y' + xy = 0. \qquad (\mathbf{E})$$

5. On suppose qu'il existe une solution de $(\mathbf{E})$ développable en série entière notée $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que $a_1 = 0$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$:
0,5

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$ 2,5

6. En utilisant un théorème d'interversion série intégrale, montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de f en fonction des termes de la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$. 1+1+1

7. Déduire des questions précédentes que f est l'unique solution développable en série entière de $(\mathbf{E})$ vérifiant $f(0) = \pi$. 3

8. En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une expression de W_n en fonction de n. 1

Problème :

Dans tout le problème, α désigne un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série 13

9. Démontrer que $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$. 1+1

10. Démontrer que $J(\alpha) = I(1-\alpha)$. 2

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

11. 1^re tentative

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $f_n(x) = (-1)^n x^{n+\alpha-1}$. Montrer que :

$$\forall x \in]0,1[\quad \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$ 1

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$? 2

12. 2^e tentative

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1}$$

Á l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x$$ 0,5 + 2 domination

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série. 1

13. En déduire que :

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$$ 1,5

On admet la formule suivante : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad \cos(\alpha x) = \dfrac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\dfrac{1}{\alpha} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2 - n^2}\right)$.

14. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$. 1

Partie II : Lien avec la fonction Γ 11,5

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t,$$

et

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}e^{-xt}\mathrm{d}t.$$

15. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$. 1+1

16. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$. 1+1

17. Démontrer que f_α est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée. 2+1

18. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$. 2

19. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. 2

En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$. 0,5

Partie III : Vers la formule des compléments 10

20. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$ 2

21. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha)e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle : $y - y' = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$. 1

En déduire que $\forall x \in]0,+\infty[\quad f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$. 2

22. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \Gamma(\alpha)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$ 2

23. Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha).\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$ 1

24. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$ 2

Fin du sujet 1