Calculatrices non autorisées

Le candidat veillera à justifier ses démonstrations exclusivement à l'aide des outils du programme de la filière.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs, $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble des nombres réels strictement négatifs et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

Pour I intervalle de $\mathbb{R}$, on note $C(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour une fonction f continue et bornée sur I, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$.

On note, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $m \in \mathbb{R}$

$$T_m(x) = \int_0^{+\infty} t^m e^{-(t^2+\frac{x}{t})}\, dt$$

On pourra librement utiliser la formule $T_0(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1.

a) Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$, l'intégrale qui définit $T_m(x)$ est convergente.

b) Quel est l'intervalle A des $m \in \mathbb{R}$ tels que l'intégrale qui définit $T_m(0)$ est convergente.

c) Calculer $T_{2k}(0)$ et $T_{2k+1}(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$ (en fonction de $k!$ et $(2k)!$).

2. **a)** Soit $m \in A$. Montrer que T_m est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que T_m est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$,

$$T_m(x) \geq e^{-1} \int_0^1 t^m e^{-\frac{x}{t}}\, dt$$

En déduire la valeur de $\lim_{x\to 0^+} T_m(x)$ lorsque $m \notin A$, en utilisant le changement de variable $w = \dfrac{x}{t}$.

3.

a) Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que T_m est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer T'_m en fonction de T_{m-1}.

b) Soit $m \in \mathbb{R}$. La fonction T_m est-elle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$? Quel est le sens de variation de T_m sur $\mathbb{R}_+^*$? La fonction T_m est-elle convexe sur $\mathbb{R}_+^*$?

c) Discuter en fonction de m la dérivabilité à droite de T_m en 0.

4.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$. Calculer $T_m(x)$ en fonction de $T_{m-2}(x)$ et $T_{m-3}(x)$. On pourra pour cela considérer la quantité

$$\int_A^B t^{m-1}(2t - x/t^2)e^{-(t^2+\frac{x}{t})}\, dt$$

pour $0 < A < B$.

b) Soit $m \in \mathbb{R}$. Trouver une relation entre $xT_m'''(x), T_m''(x)$ et $T_m(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

5.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$. Effectuer le changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$ dans l'intégrale qui définit T_m. On justifiera soigneusement le calcul.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de la quantité $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\, du$ et la calculer.

c) Montrer que pour $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $T_{-m}(1) \leq (m-2)!$.

d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!} T_{k-n}(1)x^n$ vérifie $R \geq 1$.

e) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $x \in]-1, 1[$,

$$T_k(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} T_{k-n}(1)x^n$$

6. Pour $t, x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g(t,x) = t^2 + x/t$.

a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(t,x)$ est convexe et admet un unique minimum en $t = M(x)$ que l'on déterminera. Calculer $g(M(x), x)$.

b) Soit $m \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer en utilisant l'inégalité $M(x) \leq x^{1/3}$ que

$$T_m(x) \leq \int_0^{x^{1/3}} t^m e^{-g(t,x)}\, dt + e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}} \int_{x^{1/3}}^{+\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{20}}\, dt$$

c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ (et $m \in \mathbb{R}^+$), l'on peut trouver $C > 0$ tel que

$$\forall t \geq 1,\ t^m \leq Cte^{\varepsilon t^2}$$

En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}} \int_{x^{1/3}}^{+\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{20}}\, dt = \underset{x\to\infty}{O}\left(e^{-[\frac{39}{20}-\varepsilon]x^{2/3}}\right)$$

d. Montrer que

$$T_m(x) = \underset{x\to\infty}{O}\left(x^{\frac{m+1}{3}} e^{-3(x/2)^{2/3}}\right)$$

7.

a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$T_{-1}(x) \leq \int_0^1 e^{-1/u^2}\frac{du}{u} + \int_1^{+\infty} e^{-xu}\frac{du}{u}$$

En déduire que $T_{-1}(x) \leq 2$ pour $x \geq 1$ et que

$$T_{-1}(x) \leq 2 + \int_x^1 e^{-w}\frac{dw}{w} \leq 2 - \ln(x)$$

si $0 < x \leq 1$.

b) Soit $L \in [0,1]$ et $\rho \in C([0,L])$. On pose

$$[F(\rho)](x) = \int_0^L \rho(y)T_{-1}(|x-y|)\,dy$$

Montrer que $[F(\rho)](x)$ est bien définie pour $x \in [0,L]$ et que

$$\|F(\rho)\|_\infty \leq (4L + 2L|\ln(L)|)\|\rho\|_\infty$$

8. Soit $L > 0$, $\rho \in C([0,L])$ et g_0 continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose pour $x \in [0,L]$ et $v \in \mathbb{R}^*$:

$$g(x,v) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\dfrac{e^{-v^2}}{|v|}\displaystyle\int_x^L \rho(y)e^{-\frac{x-y}{v}}\,dy & \text{si } \ v < 0 \\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\dfrac{e^{-v^2}}{|v|}\displaystyle\int_0^x \rho(y)e^{-\frac{x-y}{v}}\,dy + g_0(v)e^{-\frac{x}{v}} & \text{si } \ v > 0 \end{cases}$$

a) Montrer que $\alpha \ : \ x \in [0,L] \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(v)e^{-\frac{x}{v}}\,dv$ définit une fonction de $C([0,L])$.

b) Montrer que pour $v \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \in [0,L] \mapsto g(x,v)$ est de classe C^1 sur $[0,L]$ et

$$\forall x \in [0,L], v \in \mathbb{R}^*,\ v\frac{\partial g}{\partial x}(x,v) = \rho(x)\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-v^2} - g(x,v)$$

et

$$\forall v \in \mathbb{R}_+^*,\ g(0,v) = g_0(v),\ \forall v \in \mathbb{R}_-^*,\ g(L,v) = 0$$

9. On admet dans cette question le théorème suivant : soit $L > 0$, si H est une application de $C([0,L])$ dans $C([0,L])$ vérifiant

$$\exists\, k \in [0,1[,\ \forall \rho_1,\rho_2 \in C([0,L]),\ \|H(\rho_1) - H(\rho_2)\|_\infty \leq k\|\rho_1 - \rho_2\|_\infty$$

alors il existe un unique $\rho \in C([0,L])$ tel que $H(\rho) = \rho$.

a) Soit $L > 0$ et $\tilde{\alpha} \in C([0, L])$. Montrer que si $L \in]0, 1/20[$, il existe une unique fonction $\tilde{\rho} \in C([0, L])$ telle que

$$\forall x \in [0, L],\ \tilde{\rho}(x) = \tilde{\alpha}(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^L \tilde{\rho}(y) T_{-1}(|x - y|)\, dy$$

b) Soit $L \in]0, 1/20[$ et g_0 continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe une fonction $\tilde{g}$ de $[0, L] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

- $\forall v \in \mathbb{R}^*,\ x \mapsto \tilde{g}(x, v)$ est de classe C^1 sur $[0, L]$
- $\forall x \in [0, L], v \mapsto \tilde{g}(x, v)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
- $\forall x \in [0, L], v \in \mathbb{R}^*$,

$$v \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x, v) = \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} \tilde{g}(x, w)\, dw + \int_{\mathbb{R}_-^*} \tilde{g}(x, w)\, dw \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} - \tilde{g}(x, v)$$

- $\forall v \in \mathbb{R}_+^*,\ \tilde{g}(0, v) = g_0(v)$ et $\forall v \in \mathbb{R}_-^*,\ \tilde{g}(L, v) = 0$.

L'équation pour laquelle on a démontré un théorème d'existence est un modèle simplifié pour l'acoustique des gaz raréfiés

Fin du sujet 2