Concours Blanc - PSI - Vendredi 1er mars 2024

Exercice 1: Suites et variables aléatoires

On note S l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$.
   Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $\dfrac{-1}{\gamma}$.

2. On considère la suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S vérifiant: $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$.
   Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de γ_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle?
   (1) $y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$; (2) $y_n = \dfrac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$; (3) $y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$.

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires vérifiant les propriétés suivantes:
   - X_0 et X_1 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$;
   - pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.

   3.1. Montrer que X_2 suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

   3.2. Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

   3.3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : X_n = y_{n-1}X_0 + y_nX_1$.

   3.4. **Etude de l'espérance de la variable aléatoire X_p pour $p \in N$**

   3.4.1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une espérance que l'on notera x_p et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).

   3.4.2. Déterminer un équivalent de x_p lorsque p tend vers l'infini.

   3.5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une variance que l'on notera $\mathbb{V}(X_p)$ et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).

   3.6. Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
   Calculer, en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n), la covariance $Cov(X_p, X_q)$ des deux variables aléatoires X_p et X_q.
   Que peut-on en conclure?

Exercice 2: Une propriété de la trace des matrices symétriques positives

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes, $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices colonnes à n lignes.

$O(n)$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que toute matrice de $S_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice diagonale avec une matrice de passage orthogonale.

On note $\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans cet ordre.

L'écriture $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A. On note A^T la matrice transposée de A et $\operatorname{tr}(A)$ la trace de la matrice carrée A.

On écrira $(X|Y) = X^T.Y$ le produit scalaire canonique des matrices X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note S_n^+ l'ensemble des matrices $S \in S_n(\mathbb{R})$ qui vérifient : pour tout X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T.S.X \geq 0$.

Pour $S \in S_n(\mathbb{R})$, on a donc $X^T.S.X = (X|SX)$.

1. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres de S comptées autant de fois que leur ordre de multiplicité. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de S avec $\forall i \in [\![1, n]\!],\ SX_i = \lambda_i X_i$.

   1.1 On suppose que $S \in S_n^+$. Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \geq 0$.

   1.2 On suppose que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \geq 0$. Montrer que $S \in S_n^+$.

2. Soit $S = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $U = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   2.1 Vérifier que $S \in S_3^+$ et $U \in O(3)$.

   2.2 Vérifier que $\operatorname{tr}(AU) \leq \operatorname{tr}(A)$.

3. Soit $S \in S_n^+$.

   3.1 On considère la matrice $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i \geq 0$.
   Soit $V = (v_{i,j}) \in O(n)$. Montrer que $\operatorname{tr}(D.V) \leq \operatorname{tr}(D)$.

3.2 En déduire que pour tout $U \in O(n)$, on a $\mathrm{tr}(SU) \leq \mathrm{tr}(S)$.

4. *Réciproque de la propriété 3.2*: Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall U \in O(n),\ \mathrm{tr}(AU) \leq \mathrm{tr}(A)$. On veut montrer que $A \in S_n^+$.

4.1 *Un lemme technique:* Soient a, b, θ des réels. Montrer qu'il existe un réel φ indépendant de θ tel que $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$.

En déduire que l'inégalité "$\forall \theta \in \mathbb{R},\ a\cos(\theta) + b\sin(\theta) \leq a$" entraîne $b = 0$.

4.2 On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour p et q entiers tels que $1 \leq p < q \leq n$, on note Π le plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs e_p et e_q.

Soit u l'isométrie de $\mathbb{R}^n$ telle que u induit sur le plan Π, orienté par la base (e_p, e_q), la rotation d'angle θ et telle que u induit l'identité sur l'orthogonal de Π.

Ecrire la matrice U de u relativement à la base $\mathcal{B}$. Calculer $\mathrm{tr}(AU)$. En déduire que $A \in S_n(\mathbb{R})$.

4.3 D'après 4.2 la matrice A est symétrique. On note l l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A relativement à la base orthonormée $\mathcal{B}$. On considère une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ formée de vecteurs propres de l. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on notera $l(v_i) = \beta_i v_i$.

On suppose qu'une valeur propre de l est strictement négative et on ordonne la base $\mathcal{V}$ pour que $\beta_1 < 0$.
Soit u l'isométrie de $\mathbb{R}^n$ définie sur la base $\mathcal{V}$ par $u(v_1) = -v_1$ et pour $i \neq 1$, $u(v_i) = v_i$.

En notant U la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$, montrer que l'inégalité $\mathrm{tr}(AU) \leq \mathrm{tr}(A)$ conduit à une impossibilité et en déduire que $A \in S_n^+$.

Exercice 3: Transformée de Laplace

Dans tout cet exercice, on désigne par:
I l'intervalle $]0, +\infty[$,
$\lfloor t \rfloor$ la partie entière d'un réel t.
$\mathcal{A}$ l'ensemble des applications continues par morceaux de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la condition: $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |f(t)| \leq t$.

1. *Étude de deux fonctions:*
   On consdère pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $u_n(x) = e^{-nx}$ et $v_n = ne^{-nx}$.

1.1 Déterminer le domaine D de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ (resp. D' de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$).

On note désormais $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ pour $x \in D$ et $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ pour $x \in D'$.

1.2 Expliciter $g(x)$ pour $x \in D$.

1.3 Établir (en la justifiant) une relation entre les fonctions g et h. En déduire l'expression explicite de $h(x)$ pour $x \in D'$.

2. *Une étude de $\mathcal{A}$:*

2.1 On considère la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_0(t) = t$.
Montrer que si $x \in I$ alors l'application $t \mapsto e^{-xt} f_0(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et expliciter $F_0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f_0(t)\mathrm{d}t$.

2.2 Vérifier que si $f \in \mathcal{A}$ et si $x \in I$, alors la fonction $\varphi_x : t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, lorsque $f \in \mathcal{A}$, la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$ est bien définie sur I et on note désormais $F = \mathcal{L}(f)$.

2.3 Soit $f \in \mathcal{A}$ et $F = \mathcal{L}(f)$.

2.3.1 Déduire de ce qui précède que $xF(x)$ admet une limite que l'on précisera lorsque x tend vers $+\infty$.

2.3.2 On suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur l'intervalle I.

3. *Un exemple:*
On considère dans cette question la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_1(t) = \lfloor t \rfloor + (t - \lfloor t \rfloor)^2$ et soit $F_1 = \mathcal{L}(f_1)$.

3.1 Montrer que la fonction f_1 appartient à l'ensemble $\mathcal{A}$.

3.2 La fonction F_1 est-elle de classe C^1 sur l'intervalle I?

3.3 Indiquer l'allure du graphe de F_1 sur l'intervalle I.

3.4 Expliciter $F_1(x)$ pour $x \in I$.

Fin du sujet