Concours Blanc - PSI - Vendredi 1er mars 2024

calculatrices autorisées 4 heures

Objectif

L'objectif de ce sujet est l'étude de la gestion des erreurs dans un processus industriel.

On considère un processus industriel automatisé au cours duquel une tâche répétitive est effectuée à chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs susceptibles de se produire à l'instant n. On admet que le système parvient à corriger ces erreurs et à maintenir son fonctionnement si le nombre total d'erreurs enregistrées jusqu'à l'instant n, noté $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, reste inférieur à une quantité de la forme amn où $a > 1$ est une constante fixée et m est le nombre moyen d'erreurs enregistrées à chaque instant. On est donc amené à estimer la probabilité $\mathbf{P}(S_n > nam)$, dans le but de montrer qu'elle tend vers 0 très rapidement lorsque n tend vers l'infini.

Dans la première partie, on étudie le cas particulier où les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 1/2. Dans la deuxième partie, on démontre partiellement le théorème de Perron-Frobenius, qui permet, dans la troisième, d'étudier le cas où les variables aléatoires X_n forment une chaîne de Markov, c'est-à-dire où le nombre d'erreurs enregistrées à l'instant $n+1$ dépend uniquement de celui enregistré à l'instant n.

I. Cas de la loi de Poisson

Dans cette partie, on étudie le modèle élémentaire où la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du nombre d'erreurs aux instants successifs est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre 1/2. L'objectif de cette partie est de donner un équivalent de $\mathbf{P}(S_n > n)$ lorsque n tend vers $+\infty$, afin de s'assurer que celle-ci converge vers 0 avec une vitesse de convergence exponentielle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et G_{X_n} la fonction génératrice de X_n.

I.A Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Q 1. Montrer que S_n et X_{n+1} sont indépendantes.

Q 2. Expliciter le calcul de la fonction génératrice G_{X_1} de la variable aléatoire X_1.

Q 3. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{S_n}(t) = \big(G_{X_1}(t)\big)^n$.

Q 4. Montrer que la variable aléatoire S_n suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

I.B

Q 5. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n!\left(\frac{2}{n}\right)^n \mathbf{P}(S_n > n) = \mathrm{e}^{-n/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!\, n^k}{(n+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^k = \frac{n!\, n^k}{(n+k)!} \leqslant 1.$$

Q 7. Montrer que la série de fonctions $\sum u_k$, où, pour tout $k \in N^*$, la fonction u_k est définie sur $[0, +\infty[$ par $u_k : x \longmapsto (1+kx)^{-k}(1/2)^k$, est normalement convergente sur $[0, +\infty[$.

Q 8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{k\geqslant 1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge et que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.$$

Q 9. En déduire que

$$\mathbf{P}(S_n > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-n/2}}{n!}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Q 10. À l'aide de la formule de Stirling, en déduire qu'il existe un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $\mathbf{P}(S_n > n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\alpha^n)$.

II. Quelques résultats sur les matrices

L'objectif de cette partie est de démontrer un certain nombre de résultats d'algèbre linéaire qui serviront dans la partie suivante.

Notations

- n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres *complexes* de A et, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on note $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$. On note $\rho(A) = \max\left\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\}$.
- On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *positive* (resp. *strictement positive*) et l'on note $A \geqslant 0$ (resp. $A > 0$) si tous ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs).
- Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) est dit *positif* (resp. *strictement positif*) et l'on note $x \geqslant 0$ (resp. $x > 0$) si tous ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs).
- On définit une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $A \geqslant B$ si $A - B \geqslant 0$.
- On définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$ par $x \geqslant y$ si $x - y \geqslant 0$.
- On écrit de même $A > B$ si $A - B > 0$ et $x > y$ si $x - y > 0$.
- Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $|A|$ désigne la matrice $|A| = \left(|a_{i,j}|\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$, alors $|x|$ désigne le vecteur $|x| = \left(|x_i|\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.
- On dit que $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(A)$ est une *valeur propre dominante* de A si $|\lambda_0| > |\lambda|$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{\lambda_0\}$.

On se propose de démontrer les deux propositions suivantes.

Proposition 1. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive, alors $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A. Le sous-espace propre associé $E_{\rho(A)}(A)$ est de dimension 1 et dirigé par un vecteur propre strictement positif.*

Proposition 2. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive diagonalisable sur $\mathbb{R}$, si Y est un vecteur positif non nul de $\mathbb{R}^n$, alors $\left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$ converge, lorsque p tend vers $+\infty$, ou bien vers le vecteur nul, ou bien vers un vecteur directeur strictement positif de $E_{\rho(A)}(A)$.*

Dans toute cette partie II, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive.

II.A

Q 11. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\begin{cases} x \geqslant 0 \Longrightarrow Ax \geqslant 0, \\ x \geqslant 0 \text{ et } x \neq 0 \Longrightarrow Ax > 0. \end{cases}$

Q 12. Montrer que $A^k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 13. En déduire que $\rho(A) > 0$, puis montrer que $\rho\left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right) = 1$.

Q 14. On suppose A diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que, si $\rho(A) < 1$, alors $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} A^k = 0$.

Dans la suite du problème, on admettra que cette dernière implication est vraie que A soit diagonalisable ou non.

II.B On suppose, dans les sous-parties II.B et II.C, que A est une matrice strictement positive vérifiant $\rho(A) = 1$. On considère une valeur propre complexe λ de A de module 1 et x, un vecteur propre associé à λ. On se propose de démontrer que 1 est valeur propre de A.

Q 15. Montrer que $|x| \leqslant A|x|$.

Dans les questions **??** à **??**, on suppose que $A|x| \neq |x|$ (*énoncé modifié*).

Q 16. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A^2|x| - A|x| \geqslant \varepsilon A|x|$ (*énoncé modifié*).

Q 17. On pose $B = \dfrac{1}{1+\varepsilon}A$. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, $B^k A|x| \geqslant A|x|$.

Q 18. Déterminer $\lim\limits_{k\to\infty} B^k$.

Q 19. Conclure.

II.C

Q 20. Montrer que A admet un vecteur propre strictement positif associé à la valeur propre 1.

Q 21. Montrer que 1 est la seule valeur propre de module 1 de A.

On pourra admettre sans démonstration que si $z_1, z_2, \dots z_k$ sont des nombres complexes, tous non nuls, tels que $|z_1 + \cdots + z_k| = |z_1| + \cdots + |z_k|$, alors, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_j = \lambda_j z_1$.

Q 22. Montrer que $\dim E_1(A) = 1$.

Q 23. En regroupant les résultats des sous-parties II.B et II.C, justifier que l'on a prouvé la proposition **??**.

II.D Dans cette sous-partie, on se propose de démontrer la proposition **??**.
On suppose donc que $A > 0$ et que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $Y_p = \left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$.

Q 24. Soit $\lambda \in S = \mathrm{Sp}(A) \setminus \{\rho(A)\}$. Soit $Y \in E_\lambda(A)$. Montrer que la suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Q 25. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur positif. Montrer que la suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le projeté de Y sur $E_{\rho(A)}(A)$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{\lambda\in S} E_\lambda(A)$. Vérifier que, s'il est non nul, ce dernier vecteur (le projeté de Y) est strictement positif.

Dans la suite du problème, on admet que la proposition ?? se généralise à toute matrice A strictement positive, même non diagonalisable, et que, si $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur strictement positif, alors la suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$converge vers un vecteur strictement positif dirigeant $E_{\rho(A)}(A)$.

II.E Cette sous-partie permet de déterminer la valeur propre dominant $\rho(A)$ d'une matrice carrée A strictement positive de taille $n \geqslant 2$.

Q 26. Justifier que, pour tout entier $k \geqslant 1$, A^k est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire, dont on précisera les coefficients diagonaux.

Q 27. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\mathrm{tr}(A^{k+1})}{\mathrm{tr}(A^k)} = \rho(A)$.

III. Une inégalité relative aux chaînes de Markov

Dans toute cette partie III, N est un entier naturel non nul fixé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'intervalle d'entiers $[\![0, N]\!]$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1}) \in [\![0, N]\!]^{n+1}$,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) = \mathbf{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n).$$

On suppose que, pour tout $(i, j) \in [\![0, N]\!]^2$, la probabilité $\mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ ne dépend pas de n et est strictement positive. On note alors $q_{i,j} = \mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$.

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une *chaîne de Markov homogène sur* $[\![0, N]\!]$ *de matrice de transition* $Q = (q_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant N}$. On attire l'attention sur le fait que la numérotation des lignes et des colonnes de Q commence à 0 et que Q est une matrice carrée de taille $N + 1$.

Dans toute la suite, pour $n \geqslant 1$ fixé, on pose $\Pi_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X_n = N) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$.

III.A. Justification de l'existence des lois $(\Pi_n)_{n\geqslant 1}$

Q 28. Justifier que, pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{N} q_{i,j} = 1$.

Q 29. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_{n+1} = Q^\top \Pi_n$.

Q 30. En déduire que la loi de X_1 détermine entièrement les lois de toutes les variables aléatoires X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans toute la suite, on considère une telle chaîne de Markov et l'on pose

— $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$;

— $a_{i,j}(t) = q_{i,j}\,\mathrm{e}^{jt}$ pour tout $(i,j) \in [\![0, N]\!]^2$ et tout $t \in \mathbb{R}$;

— $A(t) = \big(a_{i,j}(t)\big)_{0\leqslant i,j\leqslant N} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$;

— $z_j(t) = \mathbf{P}(X_1 = j)\,\mathrm{e}^{jt}$ pour tout $j \in [\![0, N]\!]$ et tout $t \in \mathbb{R}$;

— $Z(t) = \begin{pmatrix} z_0(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$.

III.B Définition de la fonction de taux λ

Soient n un entier naturel non nul et t un réel fixé. On admet (*énoncé modifié*) que l'espérance de la variable aléatoire e^{tS_n} vaut

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tS_n}\right) = \sum_{j=0}^{N} Y_j^{(n)}(t), \quad \text{où} \quad Y^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} Y_0^{(n)}(t) \\ \vdots \\ Y_N^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \big(A(t)^\top\big)^{n-1} Z(t).$$

Q 31. Justifier que $A(t)^\top$ possède une valeur propre dominante $\gamma(t) > 0$.

Q 32. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tS_n}\right)\right]}{n} = \lambda(t)$ où $\lambda(t) = \ln\big(\gamma(t)\big)$.

III.C Dans cette sous-partie, on étudie deux programmes écrits en langage Python. On suppose que la bibliothèque `numpy` a été chargée à l'aide de l'instruction `import numpy as np`.

On rappelle que les opérations suivantes (qui ne sont pas décrites en toute généralité, mais seulement pour l'usage qu'on en fera ici) sont alors disponibles. *La description ci-dessous diffère assez largement de celle du sujet original, fautive en plusieurs points.*

— `np.array(range(n))` crée un tableau uniligne dont les coordonnées sont les entiers de 0 à n ;

— `a.shape` renvoie un *tuple* donnant la taille du tableau `a` pour chacune de ses dimensions ;

— dans le cas où `a` est un tableau bidimensionnel carré, `a.trace()` en renvoie la trace ;

— `np.exp(a)` renvoie un tableau de mêmes dimensions que `a` dont chaque terme est l'exponentielle du terme correspondant du tableau `a` (exponentielle terme à terme) ;

— `np.dot(a, b)` calcule le produit matriciel des tableaux bidimensionnels `a` et `b` (sous réserve de compatibilité des dimensions) ;

— si `x` est un nombre et `a` est un tableau, `x * a` renvoie un tableau de même taille que le tableau `a`, dont tous les éléments ont été multipliés par `x` ;

— si `a` et `b` sont des tableaux de même dimension, `a * b` crée le tableau réalisant le produit terme à terme de `a` et de `b`. Si `a` est un tableau bidimensionnel et `b` un tableau unidimensionnel tels que les lignes de `a` et `b` soient de même longueur, `a * b` crée un tableau identique à celui qui serait créé par `a * b_1`, où `b_1` est le tableau de même taille que `a` dont toutes les lignes sont identiques et égales à `b`. C'est un cas particulier de ce que l'on appelle *broadcasting*.

Q 33. Écrire un langage Python une fonction `puiss2k` prenant en argument une matrice carrée M (sous la forme d'un tableau bidimensionnel `M`) et un entier naturel k et renvoyant la matrice M^{2^k} en effectuant k produits matriciels. On pourra exploiter le fait que $M^{2^{k+1}} = M^{2^k} \times M^{2^k}$.

Q 34. Expliquer ce que fait la fonction Python `maxSp` définie par :

```
def maxSp(Q:np.array, k:int , t:float) -> float:
    n = Q.shape[1]
    E = np.exp(t * np.array(range(n)))
    A = Q * E
    B = puiss2k(A, k)
    C = np.dot(A, B)
    return C.trace() / B.trace()
```

III.D. Une majoration théorique et son interprétation

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda^*(x) = \sup\limits_{t \geqslant 0} \big(tx - \lambda(t)\big)$. On admet que cette borne supérieure existe et que la convergence de la suite de fonctions $\left(t \longmapsto \dfrac{\ln\left[\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tS_n})\right]}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la fonction $t \longmapsto \ln\big(\gamma(t)\big)$ démontrée à la question **??** est uniforme sur $\mathbb{R}_+$. On admet également dans toute la suite l'existence de $m = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\mathbf{E}(S_n)$ et que $\begin{cases} \lambda^*(x) = 0 & \text{pour tout } x \leqslant m, \\ \lambda^*(x) > 0 & \text{pour tout } x > m. \end{cases}$

Dans toute la suite, ε désigne un réel strictement positif.

Q 35. Montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \ln\left[\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tS_n}\right)\right] \leqslant n\big(\lambda(t) + \varepsilon\big).$$

Q 36. À l'aide de l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire e^{tS_n}, montrer que, pour $a > 1$, $n \geqslant n_0$ et $t \geqslant 0$,

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant nam) \leqslant \mathrm{e}^{-ntam} \times \mathrm{e}^{n(\lambda(t)+\varepsilon)}.$$

Q 37. En déduire que, pour $n \geqslant n_0$,

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant nam) \leqslant \mathrm{e}^{-n(\lambda^*(am)-\varepsilon)}.$$

Q 38. Donner un sens concret à m en rapport avec le processus industriel étudié et interpréter l'inégalité précédente. On pourra établir un lien intuitif avec la loi des grands nombres.

III.E Cette sous-partie constitue une application numérique et peut être traitée en admettant les résultats précédents.

On dispose de deux suites finies de réels $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_K$ ($K \geqslant 2$) et $x_1 < x_2 < \cdots < x_L$ ($L \geqslant 2$). La formule de la question Q 32 appliquée en t_i avec n suffisamment grand permet d'estimer $\lambda(t_i)$ par une valeur approchée $\hat{\lambda}(t_i)$.

Q 39. Justifier que, pour tout $i \in [\![1, L]\!]$,

$$\hat{\lambda}^*(x_i) = \max_{1\leqslant j\leqslant K} \big(tx_i - \hat{\lambda}(t_j)\big)$$

constitue une valeur approchée raisonnable de $\lambda^*(x_i)$.

Le tableau ci-dessous donne ces valeurs pour $L = 20$.

x_i $\lambda^*(x_i)$	4,50 $4,1 \times 10^{-12}$	$4,55$ $4,1 \times 10^{-12}$	$4,60$ $4,1 \times 10^{-12}$	$4,65$ $4,1 \times 10^{-12}$	$4,70$ $4,1 \times 10^{-12}$
x_i $\lambda^*(x_i)$	4,75 $5,1 \times 10^{-4}$	$4,80$ $5,5 \times 10^{-3}$	$4,85$ $1,1 \times 10^{-2}$	$4,90$ $1,6 \times 10^{-2}$	$4,95$ $2,1 \times 10^{-2}$
x_i $\lambda^*(x_i)$	5,00 $2,6 \times 10^{-2}$	$5,05$ $3,1 \times 10^{-2}$	$5,10$ $3,6 \times 10^{-2}$	$5,15$ $4,1 \times 10^{-2}$	$5,20$ $4,6 \times 10^{-2}$
x_i $\lambda^*(x_i)$	5,25 $5,1 \times 10^{-2}$	$5,30$ $5,6 \times 10^{-2}$	$5,35$ $6,1 \times 10^{-2}$	$5,40$ $6,6 \times 10^{-2}$	$5,45$ $7,1 \times 10^{-2}$

Tableau 1

Q 40. À l'aide du tableau 1, donner un encadrement approximatif de la valeur de m et la valeur d'un réel $h > 0$ tel qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ vérifiant pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mathbf{P}(S_n > 1,1 \times nm) \leqslant \mathrm{e}^{-nh}.$$

• • • FIN • • •