Exercice : Équation différentielle et série entière

On se propose de déterminer toutes les fonctions f solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - \int_0^x (t+x)f(x-t)\mathrm{d}t \quad : (E_1)\right)$$

Pour tout te fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. a) Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que si f vérifie (E_1), alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que f est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + xf(x) + 2\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

3. En déduire que f est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si :

$$(\mathcal{P}_2) \quad \begin{cases} F \text{ est dérivable deux fois sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad F''(x) + xF'(x) + 2F(x) = 0 \\ F'(0) = 1 \end{cases}$$

4. On suppose qu'il existe une fonction H développable en série entière sur $\mathbb{R}$: $H(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \quad H''(x) + xH'(x) + 2H(x) = 0 \\ H'(0) = 1 \text{ et } H(0) = 0 \end{cases}$$

   a) Prouver que l'on a : $a_0 = 0, \quad a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{n+1}$.
   b) En déduire une expression de $H(x)$ pour tout réel x à l'aide de fonctions usuelles.

5. Déterminer alors l'ensemble des solutions du problème $(\mathcal{P})$.

Problème : Normes et endomorphismes

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, de dimension finie ou infinie, muni de la norme $\|.\|_E$. On appelle opérateur sur E tout endomorphisme T de E dans E tel que

$$\exists M \geq 0 / \ \forall f \in E, \ \|T(f)\|_E \leq M\|f\|_E \tag{1}$$

On note $\mathcal{LO}(E)$ l'ensemble des opérateurs sur E.

On appelle spectre ponctuel de $T \in \mathcal{LO}(E)$ l'ensemble des réels λ tel que $T - \lambda Id_E$ n'est pas injectif. On note $\sigma_p(T)$ l'ensemble de ces réels.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1. Un premier exemple d'opérateur.

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$:

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

On note T l'application définie sur E telle que :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = xf\left(\frac{x}{2}\right)$$

a) Montrer que $T \in \mathcal{LO}(E)$.

b) Calculer la valeur minimale possible pour la constante M de la relation (1).

c) Déterminer $\ker(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.

On se place à présent dans E muni de la norme $\|.\|_2$:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\, dx}$$

d) Reprendre la question $a)$ avec cette nouvelle norme pour E.

e) Reprendre la question $b)$ avec cette nouvelle norme pour E. Pour cela, on pourra considérer la famille $(f_n)_{n\geq 2}$ d'éléments de E telle que :
(i) f_n est affine par morceaux,
(ii) $f_n(0) = f_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = f_n(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}) = f_n(1) = 0$ et $f_n(\frac{1}{2}) = 1$.

Partie 2. Un exemple de calcul de spectre ponctuel.

On note K la fonction définie de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$$K(s,t) = (1-s)t \ \text{ si } \ 0 \leq t \leq s \leq 1 \ \text{ et } \ K(s,t) = (1-t)s \ \text{ sinon}$$

On note T l'application définie sur $E = C([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_2$ définie en partie 1, par la relation

$$\forall f \in E,\ \forall s \in [0,1],\ T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)\, dt$$

a) Montrer que $T \in \mathcal{LO}(E)$.

b) Soit $f \in E$. En décomposant $T(f)$ en deux intégrales, montrer que $T(f)$ est une fonction C^2 et exprimer $(T(f))'$ puis $(T(f))''$.

c) Montrer que T est injectif.

d) Montrer que si $\lambda \in \sigma_p(T)$ et $f \in \ker(T - \lambda Id)$ alors $f \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ et vérifie l'équation

$$\lambda f'' + f = 0$$

avec les conditions $f(0) = f(1) = 0$.

e) En déduire $\sigma_p(T)$. Calculer les sous-espaces propres associés $E_\lambda = \ker(T - \lambda Id)$ à chaque élément $\lambda \in \sigma_p(T)$.