Exercice 1

Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, on pose $N(P) = \underset{t\in[0,1]}{Sup}|P(t) - P'(t)|$.Montrer que N définit une norme sur $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 2

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on pose $N(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k|x_k|$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels $a_1, \ldots, a_n$ pour que N définissent une norme sur $\mathbf{R}^n$.

Exercice 3

On identifie $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{R}^n$ que l'on munit de sa structure euclidienne canonique.

1. Montrer que $N(A) = Sup\,\{\|AX\|_2;\quad \|X\|_2 = 1\}$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que $N(A) = \underset{\lambda\in Sp({}^tAA)}{Max}\sqrt{\lambda}$.

Exercice 4

Soit $p \geqslant 2$, pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$, on pose $\|A\|_\infty = \underset{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}{Max}|a_{i,j}|$.

1. Montrer que l'on définit aisni une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$.
2. Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_p(\mathbf{R}) \quad \|AB\|_\infty \leqslant p\|A\|_\infty.\|B\|_\infty$.
3. On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ qui converge vers une matrice A pour la norme $\|\quad\|_\infty$. Montrer que pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ la suite $(A_nB)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers AB.
4. On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont deux suites de matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ qui convergent respectivement vers les matrices A et B. Montrer que la suite $(A_nB_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cnverge vers la matrice AB.

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^{2k}}{(2k)!}$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge pour la norme $\|\quad\|_\infty$ introduite dans l'exercice précédent.

Exercice 6

Soit $p \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$. On suppose que A est diagonalisable et que toutes les valeurs propres de A sont de valeur absolue strictement plus petite que 1. On définit une suite de vecteurs colonnes $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par la donnée d'un vecteur colonne X_0 et la relation de récurrence : $X_{n+1} = AX_n + B$.

1. Montrer que $A - I_p$ est inversible.
2. Montrer qu'il existe un unique vecteur colonne C telle que $C = AC + B$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_n = C + A^n(X_0 - C)$.
4. La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 7

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^2 sur $[0,1]$ vérifiant $f(0)=f(1)=0$. Pour $f \in E$ on définit $N(f) = \|f''\|_\infty = \underset{x\in[0,1]}{Sup}\,|f''(x)|$.

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer que $\| \quad \|_\infty$ est dominée par N.
3. En utilisant les fonctions $f_n : x \mapsto \sin^n(\pi x)$ avec $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que N et $\| \quad \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 8

On considère E l'espace vectoriel des suites réelles bornées et $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite a pour que $N : (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n|u_n|$ soit une norme sur E.
2. Montrer que N est dominée par la norme $\| \quad \|_\infty$.
3. Montrer que les normes N et $\| \quad \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 9

Soit $E = \mathbf{R}[X]$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $P \in E$, on pose $a_n(P) = \displaystyle\int_0^1 t^n P(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que les applications $N : P \in E \mapsto \underset{n\in\mathbf{N}}{Sup}|a_n(P)|$ et $N_2 : P \in E \mapsto \sqrt{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n(P))^2}$ définissent des normes sur E.
2. trouver un réel α strictement positif tel que $\forall P \in E \quad N(P) \leqslant \alpha N_2(P)$.
3. Montrer que N et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice 10

Soit $E = C^0([0,1],\mathbf{R})$ muni de la norme $\| \quad \|_\infty$ et $A = \left\{ f \in E, \quad f(0) = 0 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}$.

1. Montrer que A est une partie fermée.
2. Vérifier que $\forall f \in A \quad f \notin \bar{B}(0,1)$.

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel normé et C une partie convexe de E. Montrer que l'adhérence de C est une partie convexe de E.

Exercice 12

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $Vect(\bar{A}) \subset \overline{Vect(A)}$.

Exercice 13

Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, est une partie fermée et bornée.

Exercice 14

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$. On note $F = \{P^{-1}AP, \quad P \in GL_3(\mathbf{C})\}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (α, β) pour que la matrice nulle soit un point adhérent à F.

Exercice 15

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, montrer que les polynômes caractéristiques de AB et BA sont égaux.

Exercice 16

Soit $E = C^0([0,1], \mathbf{C})$ et φ l'application qui à $f \in E$ associe la primitive de $t \mapsto tf(t)$ qui s'annule en 0.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que φ est continue pour la norme $\| \quad \|_1$.
3. Montrer que φ est continue pour la norme $\| \quad \|_\infty$.

Exercice 17

Soit E un espace euclidien, montrer que $U = \{(x, y) \in E^2, \quad (x, y) \text{ est libre}\}$ est un ouvert de E^2.