Exercice 1

$\mathbf{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et orienté par $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Montrer qu'il existe une unique fonction f de classe C^2 de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}^3$ vérifiant le système $\begin{cases} f''(t) = \vec{i} + f'(t) \wedge \vec{j} \\ \\ f(0) = 0 = f'(0) \end{cases}$

Exercice 2

On identifie $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{R}^3$.

On cherche à déterminer toutes les fonctions $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ dérivables sur $\mathbf{R}$ qui vérifient l'équation différentielle (H) : $X'(t) = A.X(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = P.D.P^{-1}$.
2. Montrer que $Y : t \mapsto P^{-1}.X(t)$ est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ et donner $Y'(t)$ en fonction de $Y(t)$.
3. Résoudre l'équation (H).

Exercice 3

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f : I \to \mathbf{R}^3$ de classe C^2. On suppose que $\forall t \in I$ les vecteurs $f'(t)$ et $f(t)$ sont colinéaires. Montrer que les vecteurs $f(t)$ et $f''(t)$ le sont aussi.

Exercice 4

On munit $\mathbf{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{A}_3(\mathbf{R})$ et X_0 une solution du système différentiel $X'(t) = A.X(t)$. Montrer que $\Omega = \{X_0(t), \quad t \in \mathbf{R}\}$ est inclus dans une sphère de centre 0 de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 5

Soit M une application dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M(0) = I_n$ et $\forall t \in \mathbf{R} \quad M^2(t) = I_n$.

1. Justifier que $\forall t \in \mathbf{R}$, $M(t)$ est diagonalisable.
2. Montrer que $\forall t \in \mathbf{R} \quad M'(t) = -M(t)M'(t)M(t)$.
3. Montrer que l'application $f : t \mapsto tr(M(t))$ est constante.
4. En déduire $M(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Exercice 6

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f : I \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1 telle que $\forall t \in I \quad f(t) \neq 0$ et la famille $(f(t), f'(t))$ est liée.

On pose $g(t) = \dfrac{1}{\|f(t)\|} f(t)$, où $\| \quad \|$ est la norme euclidienne usuelle.

1. Montrer que $t \mapsto \|f(t)\|$ est de classe C^1 sur I et exprimer sa dérivée.
2. Montrer que g est une fonction de classe C^1 et que $\forall t \in I \quad g'(t)$ est à la fois orthogonal et colinéaire à $g(t)$.

3. Quelle interprétation cinématique peut-on en déduire ?

Exercice 7

On suppose que pour tout $t \in \mathbf{R}$ $A(t)$ est une matrice antisymétrique d'ordre n. Soit $X : t \mapsto X(t)$ une fonction à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dérivable telle que $\forall t \in \mathbf{R} \quad X'(t) = A(t).X(t)$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée $Y : t \mapsto X(t)^T.X(t)$.
2. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $X(t_0) \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, montrer que $\forall t \in \mathbf{R} \quad X(t)$ est aussi une matrice orthogonale.

Exercice 8

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et tout réel x, on pose $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & (0) \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \cdots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$.

1. Justifier que D_n est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer $D'_n(x)$.
2. En déduire la valeur de $D_n(x)$ pour tout réel x.