Dans tout ce chapitre les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux éléments et sont à valeurs dans $\mathbf{R}^n$:

$$f : \begin{array}{ccc} I \subset \mathbf{R} & \to & \mathbf{R}^n \\ t & \mapsto & f(t) \end{array}$$

On peut écrire $f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbf{R}^n \\ t & \mapsto & (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array}$.

Les fonctions $x_1, \dots, x_n$ sont alors des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$, appelées fonctions coordonnées de f dans la base canonique.

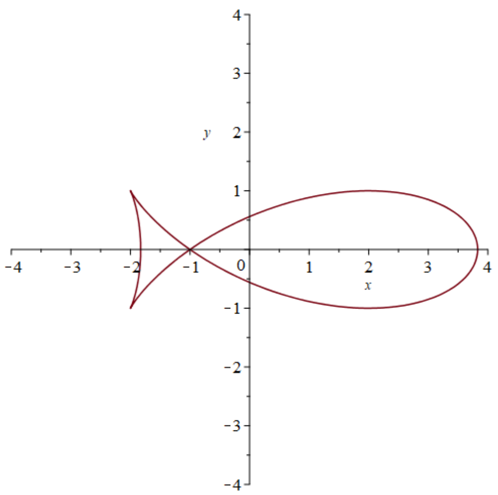
Interprétation cinématique

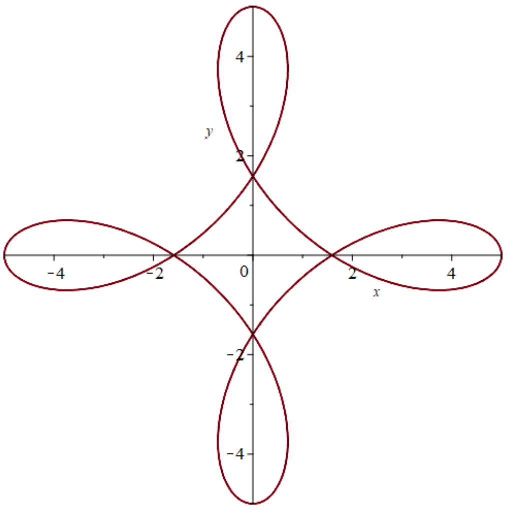
On peut considérer que $f(t)$ désigne la position d'un point mobile M en fonction du temps t dans l'espace $\mathbf{R}^n$, et donc la fonction f comme une courbe paramétrée :

Lorsque $n = 3$, si $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ alors on considère le point $M(t)$ de coordonnées $f(t)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ce qui revient aussi à $f(t) = \overrightarrow{OM}$ dans l'espace $\mathbf{R}^3$.

De même lorsque $n = 2$, si $f(t) = (x(t), y(t))$, on peut tracer la courbe paramétrée définie par le point mobile $M(t) = (x(t), y(t))$ dans le plan $\mathbf{R}^2$ muni de son repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exemples : Les courbes des fonctions $f : t \mapsto \left(\cos(t) + \sqrt{8}\cos\left(\dfrac{t}{2}\right), \sin(t)\right)$ et $g : t \mapsto (3\cos(t) + 2\cos(3t), 3\sin(t) - 2\sin(3t))$ sont :





Rappel : Les notions de limites, de continuité sont indépendantes du choix de la norme sur $\mathbf{R}^n$.

Et en particulier si $a \in \overline{I}$ et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbf{R}^n$ alors $f(t) \xrightarrow[t \to a]{} \ell \iff \forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i(t) \xrightarrow[t \to a]{} \ell_i$.

Et f est continue **ssi** $x_1, \dots, x_n$ sont continues (en $a \in I$ ou sur I).

1 Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables

Definition 1.1

On dit que f est dérivable en $a \in I$ lorsque $\lim_{t \to a} \frac{1}{t-a}(f(t) - f(a))$ existe et est finie.

Dans ce cas, la limite est appelée *vecteur dérivé* de f en a, noté $f'(a)$ ou $Df(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$.

On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point a de I.

On définit alors l'application dérivée de f, notée f' ou Df ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} : a \in I \mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$.

Remarque 1.1

Lorsque $n = 1$, $\frac{f(t) - f(a)}{t-a}$ est le taux d'accroissement de f entre t et a.
On en déduit que $f'(a)$ est la pente de la tangente (coefficient directeur) au graphe de f au point de coordonnées $(a, f(a))$.

La tangente en ce point a donc pour équation cartésienne :
$y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Proposition 1.1

f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si les n fonctions $x_1, \dots, x_n$ sont dérivables en a et on a :

$$\boxed{\forall a \in I, \quad f'(a) = (x_1'(a), \dots, x_n'(a)).}$$

Exemple 1.1

La fonction $f : t \mapsto (t^2, 1 - \cos(t), e^t)$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ avec
$\forall t > 0, \quad f'(t) = (2t, \sin(t), e^t)$.

Remarque 1.2 **Interprétation cinématique**

Si on considère $f(t)$ comme la position d'un point mobile $M(t) = f(t)$, alors

$$f'(t) \text{ est le vecteur vitesse vectorielle de ce point.}$$

et si $f'(t) \neq 0$ alors c'est un vecteur directeur de la tangente à la courbe décrite par le point mobile.

Definition 1.2 **Proposition 1.2**

On dit que f admet un **développement limité d'ordre 1** en $a \in I$ lorsqu'il existe un vecteur V de $\mathbf{R}^n$ tel que :

$$f(a+t) =_0 f(a) + tV + o(t)$$

1. Si un tel développement limité existe alors il est unique.

2. f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en a et dans ce cas

$$\boxed{f(a+t) \underset{t \to 0}{=} f(a) + tf'(a) + o(t)}$$

On en déduit que $\boxed{\text{si } f \text{ est dérivable sur } I \text{ alors } f \text{ est continue sur } I.}$

Proposition 1.3 Linéarité

Si $f : I \to \mathbf{R}^n$ et $g : I \to \mathbf{R}^n$ sont dérivables sur I alors $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \quad \alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et

$$\boxed{\forall a \in I, \quad (\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)}$$

Proposition 1.4 Composition

Soient $f : J \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ et $\varphi : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Si φ est dérivable sur I avec $\varphi(I) \subset J$ alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I avec

$$\forall a \in I, \quad (f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a).\left(f' \circ \varphi\right)(a)$$

Proposition 1.5 Action d'une application linéaire

Soient $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ et $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$.

Si f est dérivable sur I alors $L \circ f$ est dérivable sur I avec

$$\forall a \in I, \quad (L \circ f)'(a) = (L \circ f')(a)$$

Proposition 1.6 Action d'une application bilinéaire

Soit $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $g : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ et $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$.

Si f et g sont dérivables sur I et si B est une application bilinéaire alors $B(f, g) : \begin{array}{c} I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^p \\ t \mapsto B(f(t), g(t)) \end{array}$ est dérivable sur I avec

$$\forall a \in I, \quad (B(f, g))'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$$

Exemple 1.2 *Applications*

1. Si $f : I \to \mathbf{R}^n$ et $g : I \to \mathbf{R}^n$ sont dérivables sur I alors l'application $(f|g)$ est dérivable sur I avec
$$\boxed{(f|g)' = (f'|g) + (f|g')}$$
2. Si $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ et $\varphi : I \to \mathbf{R}$ sont dérivables sur I alors $\varphi.f : t \in I \mapsto \varphi(t).f(t)$ est dérivable sur I et
$$\boxed{\forall t \in I, \quad (\varphi.f)'(t) = \varphi'(t)f(t) + \varphi(t)f'(t)}$$
3. Si $f :\to \mathbf{R}^2$ et $g : I \to \mathbf{R}^2$ sont dérivables sur I alors $det(f, g) : t \mapsto det(f(t), g(t))$ est dérivable sur I avec $\boxed{det(f, g)' = det(f', g) + det(f, g').}$

Proposition 1.7 *Extension aux applications p-linéaires*

Soit $f_1, \dots, f_p$ des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ et M une application p-linéaire.

L'application $M(f_1, \dots, f_p) : t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_p(t))$ est dérivable sur I avec
$$\boxed{\forall a \in I, \quad (M(f_1, \dots, f_p))'(a) = \sum_{i=1}^{n} M(f_1(t), \dots, f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}(t), \dots, f_p(t))}$$

Remarque 1.3 **Extension**

On peut étendre les résultats précédents à une fonction $f : I \subset \mathbf{R} \to E$ où E est un espace vectoriel de dimension finie.
En effet si $dim(E) = n$ alors E peut s'identifier à $\mathbf{R}^n$ au moyen d'une base :

Pour $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E, l'application $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbf{R}^n \\ x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k e_k & \mapsto & (x_1, \dots, x_n) \end{array}$ est un isomorphisme.

On aura donc la possibilité de parler de fonction dérivable pour une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$:

Si $A : t \in I \mapsto (a_{ij}(t)) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ alors A est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si
$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{ij} : t \mapsto a_{ij}(t)$ est dérivable en t_0 et $A'(t_0) = \left(a'_{ij}(t_0)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

2 Fonctions de classe C^k

Definition 2.1

1. $\boxed{\text{On dit que } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I \text{ lorsque } f \text{ est dérivable sur } I \text{ et } f' \text{ est continue sur } I.}$
2. Par récurrence, on définit les fonctions dérivées successives sur I de f :

$$\boxed{f^{(0)} = f, \text{ et pour } k \in \mathbf{N}^*, \ f^{(k)} = (f^{(k-1)})' = (f')^{(k-1)}}$$

ainsi que les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I : f dérivable k fois et $f^{(k)}$ continue sur I.

$f^{(k)}$ se note aussi $D^k(f)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k}$.

3. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I lorsque f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I pour tout k de $\mathbf{N}$. On note
   - $C^0(I, \mathbf{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbf{R}^n$,
   - $C^k(I, \mathbf{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classeC^k sur I à valeurs dans $\mathbf{R}^n$
   - $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.

Proposition 2.1

$$\text{Soit } f : \begin{array}{l} I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^n \\ t \mapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{array}.$$

f est de classe C^k ($k \in \mathbf{N}^*$) sur I si et seulement si les n fonctions $x_1, \ldots, x_n$ sont de classe C^k sur I

et on a : $\forall t \in I, \quad f^{(k)}(t) = (x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), \ldots, x_n^{(k)}(t)).$

Proposition 2.2 Linéarité - Composée

1. $C^k(I, \mathbf{R}^n)$, pour $k \in \mathbf{N}$, est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel :

   Si $(f, g) \in C^k(I, \mathbf{R}^n) \times C^k(I, \mathbf{R}^n)$ alors $\quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad (\lambda f + \beta g) \in C^k(I, \mathbf{R}^n)$ avec

   $$(\lambda f + g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + g^{(k)}.$$

2. Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$, si $\varphi \in C^k(J, I)$ et si $f \in C^k(I, \mathbf{R}^n)$ alors $f \circ \varphi \in C^k(J, \mathbf{R}^n)$.

Proposition 2.3 Action d'une application linéaire

On considère $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ et $L \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$.

Si f est de classe C^k sur I alors $L \circ f$ aussi avec

$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad (L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}$

Proposition 2.4 Formule de Leibniz

On considère $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $g : I \to \mathbf{R}^p$ et $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ une application bilinéaire.

On rappelle que l'on définit l'application $B(f, g)$ de I dans $\mathbf{R}^q$ par :

$$\forall t \in I, \quad B(f, g)(t) = B(f(t), g(t))$$

Si f et g sont de classe C^k sur I alors $B(f,g)$ est de classe C^k sur I avec :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad B(f,g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i)}) \qquad \text{(Formule de Leibniz)}$$

Exemple 2.1

Application de ce qui précède à $(\varphi.f)^{(k)}$ avec $f : I \to \mathbf{R}^n$ et $\varphi : I \to \mathbf{R}$ de classe C^k sur I.