Exercice : Extrait de E3A MP 2019

On se propose de déterminer toutes les fonctions f solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - \int_0^x (t+x) f(x-t) \mathrm{d}t \quad : (E_1) \right)$$

Pour tout te fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. a) f étant continue, d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, c'est celle qui s'annule en 0. $\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } \forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = f(x).}$

   b) On suppose que f vérifie (E_1). Par le changement de variable affine $t = x-u$, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= 1 - \int_x^0 (-1)(2x-u) f(u)\mathrm{d}u \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= 1 - 2xF(x) + \int_0^x u f(u)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

   La fonction $u \mapsto uf(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par produit, alors $x \mapsto \displaystyle\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et par somme de fonctions de classe C^1, $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

2. • Si f est solution de $(\mathcal{P})$ alors d'après la question précédente, f est dérivable et $f(x) = 1 - 2xF(x) + \displaystyle\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$, donc $f(0) = 1$ et par dérivation

$$f'(x) = -2F(x) - 2xf(x) + xf(x) = -2F(x) - xf(x)$$

donc f vérifie $(\mathcal{P}_1)$ $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + xf(x) + 2\displaystyle\int_0^x f(u)\ \mathrm{d}u = 0 \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$

• Réciproquement si f vérifie $(\mathcal{P}_1)$ $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + xf(x) + 2\displaystyle\int_0^x f(u)\ \mathrm{d}u = 0 \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$. f est dérivable donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(0) = f(x) - 1$. De plus $f'(x) = -2F(x) - xf(x)$ donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t \\
&= 1-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x F(t)\mathrm{d}t \\
&\qquad \text{en intégrant par partie la seconde intégrale on a} \\
&= 1-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-2\left[tF(t)\right]_0^x+2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t \\
f(x) &= 1-2xF(x)+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et donc f vérifie $(\mathcal{P})$.Par double implication on a montré

$$\boxed{f \text{ vérifie } (\mathcal{P}) \text{ si et seulement si : } (\mathcal{P}_1) \quad \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)+xf(x)+2\displaystyle\int_0^x f(u)\ \mathrm{d}u=0 \\ f(0)=1 \end{cases}}$$

Autre rédaction :
Dans l'implication f vérifie $(\mathcal{P}) \Longrightarrow f$ vérifie $(\mathcal{P}_1)$, on a obtenu que la dérivée de $G : x\mapsto 1-2xF(x)+\displaystyle\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$ est la fonction $g : x\mapsto -2F(x)-xf(x)$, donc G est une primitive de g.
Si f vérifie $(\mathcal{P}_1)$ alors f est dérivable donc continue et $f'(x)=g(x)$, alors il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=G(x)+c$, or $f(0)=1$ et $G(0)=1$, donc $c=0$ et on a bien
$f(x)=1-2xF(x)+\displaystyle\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u=1-\int_0^x (t+x)f(x-t)\mathrm{d}t$. Donc f vérifie $(\mathcal{P})$.

3. F est la primitive de f qui s'annule en 0, donc f est dérivable si et seulement si F est dérivable deux fois avec $F'=f$ et $F''=f'$, on déduit immédiatement de la question précédente que f est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si :

$$(\mathcal{P}_2) \quad \begin{cases} F \text{ est dérivable deux fois sur } \mathbb{R} \\ \forall x\in\mathbb{R} \quad F''(x)+xF'(x)+2F(x)=0 \\ F'(0)=1 \end{cases}$$

4. On suppose qu'il existe une fonction H développable en série entière sur $\mathbb{R}$: vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x\in\mathbb{R} \quad H''(x)+xH'(x)+2H(x)=0 \\ H'(0)=1 \text{ et } H(0)=0 \end{cases}$$

a) $\forall x\in\mathbb{R} \quad H(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$, et on sait que $\forall n\in\mathbb{N} \quad a_n=\dfrac{H^{(n)}(0)}{n!}$, donc

$\boxed{a_0 = H(0) = 0, \quad a_1 = H'(0) = 1}$ et

$$\begin{aligned} H''(x) + xH'(x) + 2H(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} 2a_k x^k = 0 \\ H''(x) + xH'(x) + 2H(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left((k+2)(k+1)a_{k+2} + (k+2)a_k\right) x^k \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle on a :
$H''(x) + xH'(x) + H(x) = 0 \iff \forall k \in \mathbb{N} \quad (k+2)\left((k+1)a_{k+2} + a_k\right) = 0$, et puisque $k+2 \neq 0$, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = -\dfrac{a_n}{n+1}.}$

b) On déduit des égalités précédentes que $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n} = \dfrac{-a_{2n-2}}{2n-1}$ avec $a_0 = 0$, et $a_1 = 1$ avec $a_{2n+1} = \dfrac{-a_{2n-1}}{2n} = \dfrac{(-1)^2}{(2n)(2n-2)}a_{2n-3} = \dfrac{(-1)^3}{(2n)(2n-2)(2n-4)}a_{2n-5} = \dfrac{(-1)^3}{2^3 n(n-1)(n-2)}a_{2n-5}$.
On montre par récurrence (à vous de la faire) la conjecture

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$$

Par croissances comparées $\forall r > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} |a_{2n+1}| r^{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{r}{n!}\left(\dfrac{r}{2}\right)^n = 0$, donc $R = Sup\{r \geq 0, \quad (a_n r^n) \text{ est bornée}\} = +\infty$.
La série entière dont H est la somme est donc de rayon de convergence égal à $+\infty$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^n = x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

5. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2$ étant continues sur $\mathbb{R}$, le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' + xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$ admet une unique solution qui est donc H, or f vérifie $(\mathcal{P})$ si et seulement si F sa primitive qui s'annule en 0 vérifie $(\mathcal{P}_2)$, ce qui revient à F vérifie aussi ce problème de Cauchy, donc $F = H$ et f est solution si et seulement si $\forall x \in R \quad f(x) = F'(x) = H'(x)$.

$$\boxed{\text{Le problème } (\mathcal{P}) \text{ admet pour unique solution la fonction } f : x \mapsto (1-x^2)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).}$$

Problème : Extrait de X-ENS PSI 2014

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, de dimension finie ou infinie, muni de la norme $\|.\|_E$. On appelle opérateur sur E tout endomorphisme T de E dans E tel que

$$\exists M \geq 0 / \ \forall f \in E, \ \|T(f)\|_E \leq M\|f\|_E \tag{1}$$

On note $\mathcal{LO}(E)$ l'ensemble des opérateurs sur E.

On appelle spectre ponctuel de $T \in \mathcal{LO}(E)$ l'ensemble des réels λ tel que $T - \lambda Id_E$ n'est pas injectif. On note $\sigma_p(T)$ l'ensemble de ces réels.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1. Un premier exemple d'opérateur.

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$:

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

On note T l'application définie sur E telle que :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = xf\left(\frac{x}{2}\right)$$

a) • Soit $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $x \in [0,1]$ $\quad \dfrac{x}{2} \in [0,1]$, donc par composée et produit $T(f)$ est continue sur $[0,1]$. De plus

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,1] \quad T(\lambda f + g)(x) &= x(\lambda f + g)\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= x\left(\lambda f\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
&= \lambda x f\left(\frac{x}{2}\right) + xg\left(\frac{x}{2}\right) \\
\forall x \in [0,1] \quad T(\lambda f + g)(x) &= \lambda T(f)(x) + T(g)(x)
\end{aligned}$$

On a donc $T(\lambda f + g) = \lambda Tf(f) + T(g)$ et T est un endomorphisme de E.

• $\forall x \in [0,1] \quad |T(f)(x)| = |x|.\left|f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$.
Si $x \in [0,1]$ alors $\dfrac{x}{2} \in [0,1]$ et donc

$$\forall x \in [0,1] \quad |T(f)(x)| \leqslant |x|.\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

On en déduit que $\|T(f)\|_\infty \leqslant M.\|f\|_\infty$ avec $M = 1$.

$\boxed{T \text{ est donc un opérateur de } E.}$

b) Notons M la plus petite valeur (sous réserve d'existence) telle que :
$\forall f \in E \quad \|T(f)\|_\infty \leqslant M\|f\|_\infty$, d'après ce qui précède on a $\forall f \in E \quad \|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ donc $M \leqslant 1$.
De plus en prenant $f : x \mapsto 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $\|T(f)\|_\infty = \underset{x\in[0,1]}{Sup}|x| = 1$, donc $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty \leqslant M\|f\|_\infty$ avec $\|f\|_\infty = 1 \neq 0$ donc $M \geqslant 1$.

$\boxed{\text{La plus petite valeur pour la constante } M \text{ de la relation (1) est 1.}}$

c) • Déterminons $\ker(T)$:

$$\begin{aligned}
f \in \ker(T) &\iff T(f) = 0 \\
&\iff \forall x \in [0,1] \quad T(f)(x) = 0 \\
&\iff \forall x \in [0,1] \quad xf\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\
&\iff \forall x \in]0,1] \quad f\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\
&\iff \forall t \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \quad f(t) = 0
\end{aligned}$$

et par continuité de f

$$f \in \ker(T) \iff \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad f(t) = 0$$

On a donc $\boxed{\ker(T) \text{ est l'ensemble des fonctions continues sur } [0,1] \text{ et nulles sur } \left[0, \frac{1}{2}\right].}$

• Déterminons $\mathrm{Im}(T)$ en procédant par analyse-synthèse :

$$g \in \mathrm{Im}(T) \Longrightarrow \exists f \in E \quad T(f) = g \Longrightarrow \exists f \in E \quad \forall x \in [0,1] \quad g(x) = xf\left(\frac{x}{2}\right)$$

On a donc

$$g \in \mathrm{Im}(T) \Longrightarrow g(0) = 0 \text{ et } \exists f \in E \quad \forall x \in]0,1] \quad f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{g(x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

Par continuité de f en 0, on doit avoir $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = f(0)$.

Donc si $g \in \mathrm{Im}(T)$ alors g est continue sur $[0,1]$, $g(0) = 0$ et g est dérivable en 0.

Réciproquement, soit g une fonction continue sur $[0,1]$, nulle en 0 et dérivable en 0. Posons

$$f : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(2x)}{2x} & \text{si } x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right] \\ g'(0) & \text{si } x = 0 \\ g(1) & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

— Cette fonction est continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, en tant que quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ en tant que fonction constante.

— Puisque $g(0) = 0$, on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{g(2x)}{2x} = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = g'(0) = f(0)$ donc f est continue en 0.

— $\lim\limits_{x \to 1/2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1/2 \\ x \leq 1/2}} \frac{g(2x)}{2x} = \lim\limits_{t \to 1} \frac{g(t)}{t} = g(1) = \lim\limits_{x \to 1/2^+} f(x)$ donc f est continue en $\frac{1}{2}$.

Finalement f est continue sur $[0,1]$ et vérifie $T(f)=g$, donc $g\in \mathrm{Im}(T)$.

$\boxed{\mathrm{Im}(T) \text{ est l'ensemble des fonctions continues sur } [0,1] \text{ qui s'annulent en 0 et qui sont dérivables en 0.}}$

On se place à présent dans E muni de la norme $\|.\|_2$:

$$\|f\|_2=\sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\,dx}$$

d) On sait déjà que T est un endomorphisme de E. Il reste à vérifier qu'il existe $M>0$ tel que $\forall f\in E \quad \|T(f)\|_2\leqslant M\|f\|_2$.

Soit $f\in E$,

$$\|T(f)\|_2^2=\int_0^1\left|xf\left(\frac{x}{2}\right)\right|^2\mathrm{d}x$$

Par le changement de variable affine $t=\dfrac{x}{2}$, on obtient :

$$\|T(f)\|_2^2=\int_0^{\frac12} 2\left|2tf\left(t\right)\right|^2\mathrm{d}t$$

$$\|T(f)\|_2^2=8\int_0^{\frac12} t^2\left|f(t)\right|^2\mathrm{d}t$$

Si $t\in\left[0,\dfrac12\right],\quad t^2\in\left[0,\dfrac14\right]$ et $|f(t)|^2\geq 0$, donc par croissance de l'intégrale

$$\|T(f)\|_2^2\leq\frac84\int_0^{\frac12}|f(t)|^2\mathrm{d}t$$

Et par relation de Chasles sachant que l'intégrale sur un segment d'une fonction continue positive est positive on a :

$$\|T(f)\|_2^2\leq 2\int_0^{\frac12}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\leqslant 2\int_0^1|f(t)|^2\mathrm{d}t$$

On a donc $\|T(f)\|_2^2\leq 2\|f\|_2^2$ et finalement $\|T(f)\|_2\leq\sqrt{2}\|f\|_2$.

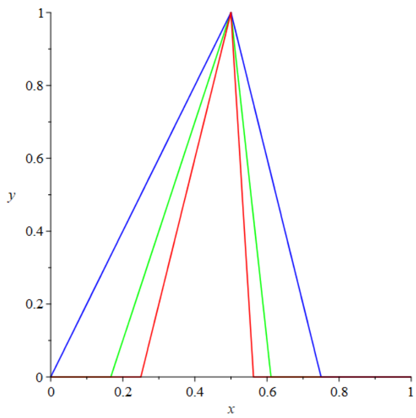
$\boxed{T \text{ est bien un opérateur pour la norme } \|\quad\|_2.}$

e) D'après ce qui précède, si M est la plus petite valeur vérifiant $\forall f\in E\quad\|T(f)\|_2\leq M\|f\|_2$ alors $M\leq\sqrt2$.

Considérons la famille $(f_n)_{n\geq 2}$ d'éléments de E telle que :
(i) f_n est affine par morceaux,
(ii) $f_n(0)=f_n(\frac12-\frac1n)=f_n(\frac12+\frac1{n^2})=f_n(1)=0$ et $f_n(\frac12)=1$.

On en déduit que f_n est nulle sur le segment $\left[0,\dfrac12-\dfrac1n\right]$, il existe $(a_n,b_n)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\left[\dfrac12-\dfrac1n,\dfrac12\right]\quad f_n(x)=a_nx+b_n$ avec $f_n(1/2)=1$ et $f_n\left(\dfrac12-\dfrac1n\right)=0$, donc $a_n=n$ et $b_n=1-\dfrac{n}{2}$. De même il existe c_n et d_n réels tels que $\forall x\in\left[\dfrac12,\dfrac12+\dfrac1{n^2}\right]$

$f_n(x) = c_n x + d_n$ avec $f(1/2) = 1$ et $f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}\right) = 0$ donc $c_n = -n^2$ et $d_n = 1 + \frac{n^2}{2}$ donc $\forall n \geq 2, \quad \forall x \in [0,1] \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right] \\ nx + 1 - \frac{n}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right] \\ -n^2 x + 1 + \frac{n^2}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}, 1\right] \end{cases}$. Voici les courbes de f_2, f_3, f_4 (bleue, verte, rouge) :



On a donc $\forall x \in [0,1] \quad T(f_n)(x) = x f_n\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, 1 - \frac{2}{n}\right] \\ x\left(\frac{nx}{2} + 1 - \frac{n}{2}\right) & \text{si } x \in \left[1 - \frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$ Par relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned} \|f_n\|_2^2 &= \int_0^1 |f_n(x)|^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (f_n(x))^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \left(nx + 1 - \frac{n}{2}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}} \left(-n^2 x + 1 + \frac{n^2}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\|f_n\|_2^2 = \left[\frac{1}{3n}\left(nx + 1 - \frac{n}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{1}{3n^2}\left(-n^2 x + 1 + \frac{n^2}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}}$$

$$\|f_n\|_2^2 = \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n^2} = \frac{n+1}{3n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$$

De même $\|T_n(f)\|_2^2 = \int_0^1 |T(f_n)(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{1-\frac{2}{n}}^1 x^2 \left(\frac{nx}{2} + 1 - \frac{n}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$, ce qui donne après développement

$$\|T_n(f)\|_2^2 = \int_{1-\frac{2}{n}}^1 \left(\frac{n^2}{4} x^4 + \left(1 - \frac{n}{2}\right) n x^3 + \left(1 - \frac{n}{2}\right)^2 x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$\|T_n(f)\|_2^2 = \left[\frac{n^2}{4}.\frac{x^5}{5} + (1-\tfrac{n}{2})\frac{nx^4}{4} + (1-\tfrac{n}{2})^2\frac{x^3}{3}\right]_{1-\frac{2}{n}}^{1} \text{ et après calculs}$$

$$\|T(f_n)\|_2^2 = \frac{2}{3n} - \frac{2}{3n^2} + \frac{4}{15n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3n}$$

On en déduit que

$$\frac{\|T_n\|_2^2}{\|f_n\|_2^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2/3n}{1/3n} = 2$$

et puisque $\forall n \geq 2 \quad \|T_n(f)\|_2 \leq M\|f_n\|_2$, on aura $\forall n \geq 2 \quad \dfrac{\|T_n\|_2}{\|f_n\|_2} \leq M$ et par passage à la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\|T_n\|_2}{\|f_n\|_2} = \sqrt{2} \leq M$. On avait aussi $M \leq \sqrt{2}$.

La plus petite valeur M telle que $\forall f \in E \quad \|T(f)\|_2 \leq M\|f\|_2$ est donc $\boxed{M = \sqrt{2}.}$

Partie 2. Un exemple de calcul de spectre ponctuel.

On note K la fonction définie de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$$K(s,t) = (1-s)t \text{ si } 0 \leq t \leq s \leq 1 \text{ et } K(s,t) = (1-t)s \text{ sinon}$$

On note T l'application définie sur $E = C([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_2$ définie en partie 1, par la relation

$$\forall f \in E,\ \forall s \in [0,1],\ T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)\,dt$$

a) • Pour s fixé dans $[0,1]$, on a $\forall t \in [0,1] \quad K(s,t) = \begin{cases} (1-s)t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant s \\ \\ s - st & \text{si } s < t \leqslant 1 \end{cases}$. La fonction $t \mapsto K(s,t)$ est donc continue par morceaux sur $[0,1]$. Par produit de fonctions continues par morceaux, la fonction $t \mapsto K(s,t)f(t)$ est continue par morceaux sur $[0,1]$.
Par linéarité de l'intégrale de fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$, on obtient la linéarité de l'application T.

Pour $t \in [0,1]$ fixé, $\forall s \in [0,1] \quad K(s,t) = \begin{cases} t - st & \text{si } 0 \leqslant s < t \\ \\ t - st & \text{si } t \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$.
La fonction $s \mapsto K(s,t)$ est continue sur $[0,1]$, en effet elle est affine par morceaux avec $\displaystyle\lim_{s\to t^-} K(s,t) = (1-t)t = \lim_{s\to t^+} K(s,t)$, donc
• $\forall t \in [0,1] \quad s \mapsto K(s,t)f(t)$ est continue sur $[0,1]$.
• $\forall s \in [0,1] \quad t \mapsto K(s,t)f(t)$ est continue par morceaux sur $[0,1]$.
• D'après son expression, pour s fixé, on a $\forall t \in [0,1] \quad |K(s,t)| \leq 1$, donc

$$\forall (s,t) \in [0,1]^2 \quad |K(s,t)f(t)| \leq \|f\|_\infty$$

et la fonction constante $t \mapsto \|f\|_\infty$ est intégrable sur le segment $[0,1]$ donc par théorème de continuité, la fonction $s \mapsto T(f)(s) = \displaystyle\int_0^1 K(s,t)f(t)\mathrm{d}t$ est continue sur $[0,1]$. T est donc un endomorphisme de E.

• Puisque $\forall (s,t) \in [0,1]^2 \quad (1-s) \in [0,1]$ et $(1-t) \in [0,1]$ alors $|K(s,t)| \leqslant 1$, et on a $\forall (s,t) \in [0,1]^2 \quad 0 \leqslant |K(s,t)f(t)| \leqslant |f(t)|$.
Par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale on a :

$$\forall s \in [0,1] \quad |T(f)(s)| \leqslant \int_0^1 |K(s,t)f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ sur E l'ensemble des fonctions continue sur le segment $[0, 1]$, on sait que

$$\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t =< |f|, 1 >\leq \sqrt{< |f|, |f| >}.\sqrt{< 1, 1 >}$$

ce qui donne $\forall s \in [0, 1] \quad |T(f)(s)| \leqslant \|f\|_2$ et donc

$$\|T(f)\|_2^2 = \int_0^1 |T(f)(s)|^2\mathrm{d}s \leq \int_0^1 \|f\|_2^2\mathrm{d}s$$

Et finalement $\|T(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$. $\boxed{T \text{ est donc un opérateur sur } E.}$

b) Soit $f \in E$. Avec la définition de $K(s, t)$, par relation de Chasles, on peut écrire :

$$\forall s \in [0, 1] \quad T(f)(s) = \int_0^s (1-s)tf(t)\mathrm{d}t + \int_s^1 (1-t)sf(t)\mathrm{d}t = (1-s)\int_0^s tf(t)\mathrm{d}t - s\int_1^s (1-t)f(t)\mathrm{d}t$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $s \mapsto \int_0^s tf(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ en tant de primitive de la fonction continue $t \mapsto tf(t)$, de même $s \mapsto \int_1^s (1-t)f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de la fonction $t \mapsto (1-t)f(t)$. Par produit et somme de fonctions de classe C^1, $T(f)$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ avec

$$\forall s \in [0, 1] \quad (T(f))'(s) = -\int_0^s tf(t)\mathrm{d}t + (1-s)sf(s) - \int_1^s (1-t)f(t)\mathrm{d}t - s(1-s)f(s)$$

$$\boxed{\forall s \in [0, 1] \quad (T(f))'(s) = -\int_0^s tf(t)\mathrm{d}t - \int_1^s (1-t)f(t)\mathrm{d}t}$$

$(T(f))'$ est alors une somme de deux fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$, donc $T(f)$ est de classe C^2 sur $[0, 1]$ avec

$$\forall s \in [0, 1] \quad (T(f))''(s) = -sf(s) - (1-s)f(s)$$

$$\boxed{\forall s \in [0, 1] \quad (T(f))''(s) = -f(s)}$$

c) T étant un endomorphisme de E, T est injectif si et seulement si $\ker(T) = \{0\}$. On sait que $0 \in \ker(T)$, de plus avec le résultat de la question précédente on a immédiatement :

$$f \in \ker(T) \Longrightarrow T(f) = 0 \Longrightarrow (T(f))'' = 0 \Longrightarrow -f = 0$$

Donc $\ker(T) \subset \{0\}$ et finalement $\ker(T) = \{0\}$. $\boxed{T \text{ est donc injectif.}}$

d) Soit $\lambda \in \sigma_p(T)$ et $f \in \ker(T - \lambda Id)$ alors $\lambda \neq 0$ (T est injectif donc $0 \notin \sigma_p(T)$) et donc $f = \frac{1}{\lambda}T(f)$. On a vu en question b) que $T(f) \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ et $(T(f))'' = -f$, donc $f \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ et

$$\lambda f'' + f = (T(f))'' + f = 0$$

On a aussi $f(0) = \frac{1}{\lambda}T(f)(0) = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 K(0, t)f(t)\mathrm{d}t = 0$ puisque $K(0, t) = (1-t).0 = 0$.

Et $f(1) = \frac{1}{\lambda}T(f)(1) = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 K(1, t)f(t)\mathrm{d}t = 0$ puisque $K(1, t) = (1-1)t = 0$.

e) On déduit de ce qui précède :

$$\lambda \in \sigma_p(T) \Longrightarrow \exists f \in E, \quad f \neq 0, \quad \text{telle que } \begin{cases} \lambda f'' + f = 0 \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases} \quad \text{et } \lambda \neq 0$$

Donc si $\lambda \in \sigma_p(t)$, alors il existe f non identiquement nulle vérifiant l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants $y'' + \dfrac{1}{\lambda}y = 0$ avec les conditions $f(0) = 0 = f(1)$.
L'équation caractéristique associée est $r^2 + \dfrac{1}{\lambda} = 0$ ou encore $r^2 = -\dfrac{1}{\lambda}$.

- Si $\lambda > 0$, alors on sait : $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in [0,1] \quad f(x) = a\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + b\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$, et $a = 0$ puisque $f(0) = 0$ donc $\forall x \in [0,1] \quad f(x) = b\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$ et $f \neq 0$ donc $b \neq 0$ et alors $f(1) = 0 \Longleftrightarrow \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
- Si $\lambda < 0$, alors on sait : $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) = a.\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right) + b.\mathrm{sh}\left(\dfrac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right)$, et $a = 0$ puisque $f(0) = 0$. Alors $f(1) = 0 \Longleftrightarrow b.\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}\right) = 0 \Longleftrightarrow b = 0$ (la fonction sh ne s'annule qu'en 0). Ce qui est absurde puisque f n'est pas la fonction nulle.

On pouvait aussi écrire $f(x) = a\exp\left(\dfrac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right) + b\exp\left(-\dfrac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right)$ *mais c'est plus long pour obtenir* a *et* b.

On déduit de cette étude que $\sigma_p(T) \subset \left\{\dfrac{1}{k^2\pi^2}, \quad k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Réciproquement, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_k : x \mapsto \sin(k\pi x)$ est dans E et vérifie
$f_k''(x) + k^2\pi^2 f_k(x) = 0$ donc

$$f_k''(x) = -k^2\pi^2 f_k(x) = -k^2\pi^2 (T(f_k))''(x)$$

Il existe donc $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_k(x) = -k^2\pi^2 T(f_k)(x) + a_k x + b_k$,
or $f_k(0) = 0 = T(f_k)(0)$, donc $b_k = 0$. On a aussi $f_k(1) = 0 = T(f_k)(1)$ donc $a_k = 0$ et finalement $f_k = k^2\pi^2 T(f_k)$, ou encore $T(f_k) = \dfrac{1}{k^2\pi^2} f_k$ avec $f_k \neq 0$, ce qui signifie que $\dfrac{1}{k^2\pi^2} \in \sigma_p(T)$.

Finalement $\boxed{\begin{array}{l} \sigma_p(T) = \left\{\dfrac{1}{k^2\pi^2}, \quad k \in \mathbb{N}^*\right\} \text{ et d'après ce qui précède} \\ \ker\left(T - \dfrac{1}{k^2\pi^2} Id_E\right) = Vect\,(x \mapsto \sin(k\pi x)). \end{array}}$