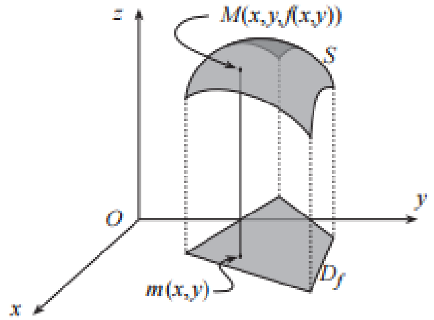
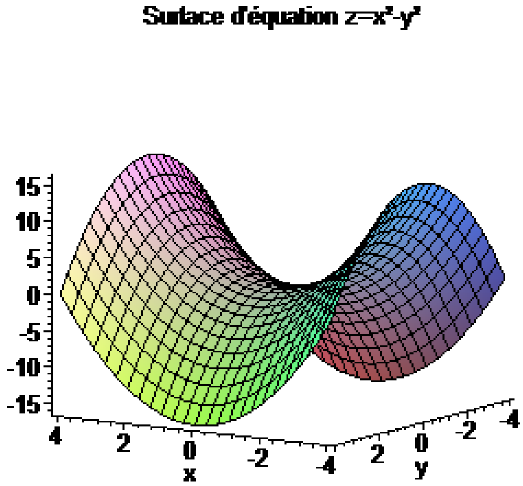
Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$, $p \geqslant 2$, à valeurs dans $\mathbf{R}$:

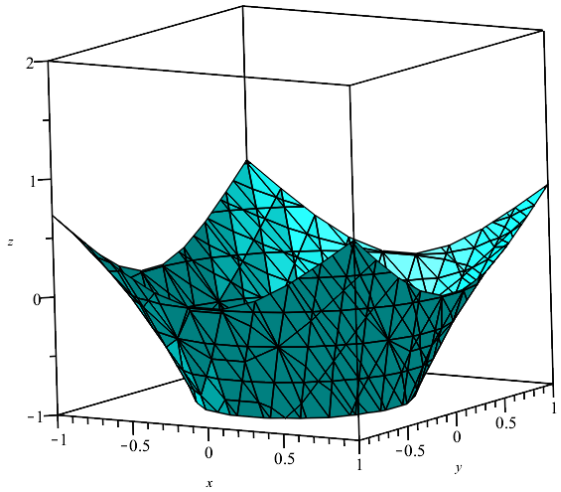
$$f : \begin{array}{ccc} U \subset \mathbf{R}^p & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & f(x) = f(x_1, \ldots, x_p) \end{array}$$

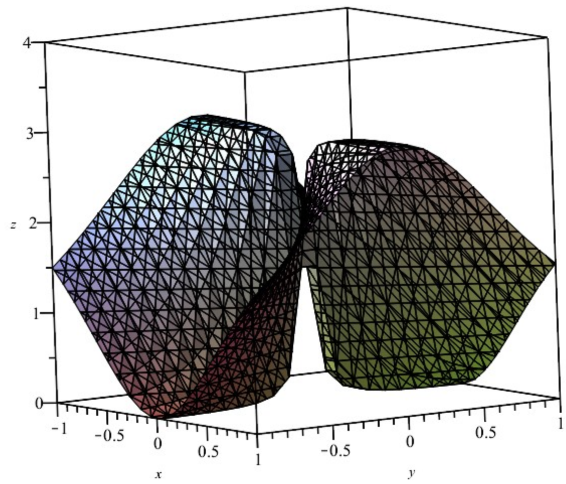
On peut voir f comme une fonction des p variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Dans le cas $p = 2$, on pourra représenter la fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ dans $\mathbf{R}^3$ par la surface d'équation $z = f(x, y)$.









$\mathbf{R}^p$ est un espace euclidien et toutes les normes de $\mathbf{R}^p$ sont équivalentes. Les notions vues dans ce paragraphe sont indépendantes de la norme choisie.
On note $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_p})$ la base canonique de $\mathbf{R}^p$.

1 Rappels sur la continuité

Definition 1.1

- On dit que f est continue en $a \in U$ lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists r > 0 \quad \forall x \in U, \quad \|x - a\| \leqslant r \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

- On dit que f est continue sur U lorsque f est continue en tout point a de U.

Remarque 1.1

• Toute fonction lipschitzienne de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$ est continue.

• Toute fonction polynomiale de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$ est continue.

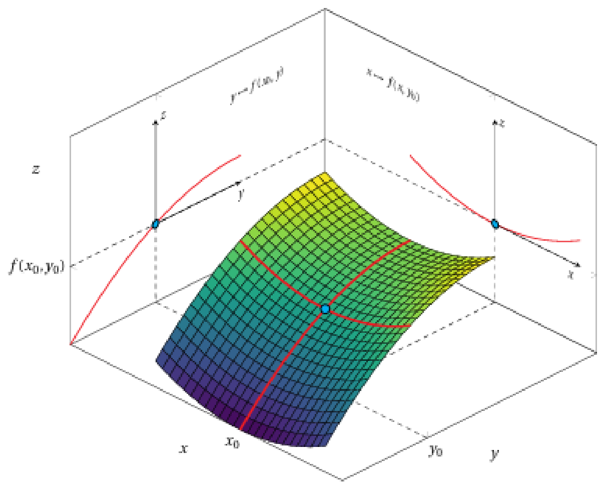
• Par opérations algébriques, si $f : U \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ et $g : U \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ sont continues sur U alors $\lambda f + g$, avec $\lambda \in \mathbf{R}$, $f.g$, $\dfrac{f}{g}$, avec g qui ne s'annule pas sur U, sont continues sur U.

Definition 1.2

Pour $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$, on définit les applications partielles de f en a par :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, p]\!], \quad f_{a,k} : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_p)}$$

U étant un ouvert, pour $a \in U$, les applications partielles $f_{a,i}$ de f en a sont définies au moins sur un voisinage de a_i.



Remarque 1.2

Si f est continue en $a = (a_1, \dots, a_p)$ alors $\forall k \in [\![1, p]\!]$ $f_{a,k}$ est continue en a_k.
La réciproque est fausse comme le montrera un des exemples ci-dessous.

La continuité d'une fonction de p variables ne se ramène pas à la continuité des fonctions partielles !

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ (x, y) \mapsto x^3 + 3xy + 5y^2 \end{array}$

Ne pas dire f est continue par rapport à x et par rapport à y donc f est continue !! Mais f est continue car polynômiale.

Proposition 1.1 *Composition 1*

Soit $f : U \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ et soit $\varphi : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tel que $f(U) \subset I$.

On peut considérer $\varphi \circ f : \begin{array}{ccc} A \subset \mathbf{R}^p & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \varphi(f(x)) \end{array}$.

On a vu que $\boxed{\text{si } f \text{ est continue sur } U \text{ et } \varphi \text{ est continue sur } I \text{ alors } \varphi \circ f \text{ est continue sur } U.}$

Exemple 1.1

L'application $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto e^{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Proposition 1.2 *Composition 2*

Soit $f : \begin{array}{ccc} U \subset \mathbf{R}^p & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_p) \end{array}$ et soit $\varphi : \begin{array}{ccc} I \subset \mathbf{R} & \to & \mathbf{R}^p \\ t & \mapsto & \varphi(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t)) \end{array}$ avec $\varphi(I) \subset U$.

Soit $t_0 \in I$ et $a = \varphi(t_0) = (x_1(t_0), \ldots, x_p(t_0))$.

On rappelle que si φ est continue en t_0 et f est continue en $a = \varphi(t_0)$ alors
$f \circ \varphi : \begin{array}{ccc} I \subset \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & f(x_1(t), \ldots, x_p(t)) \end{array}$ est continue en t_0.

Or φ est continue en t_0 **ssi** $\forall i \in [\![1, p]\!] \quad x_i(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} x_i(t_0)$ (les u_i sont les fonctions coordonnées de φ dans la base canonique de $\mathbf{R}^p$).
On aura donc :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad x_i(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} x_i(t_0) \text{ et } f \text{ continue en } a \Longrightarrow f(x_1(t), \ldots, x_p(t)) \xrightarrow[t \to t_0]{} f(x_1(t_0), \ldots, x_p(t_0))$$

Conséquence :

> S'il existe des fonctions $x_1 : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R} \ldots x_p : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $t_0 \in \overline{I}$ telles que
>
> $\forall i \in [\![1, p]\!] \quad x_i(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} a_i$ et $f(x_1(t), \ldots, x_p(t)) \underset{t \to t_0}{\not\to} f(a_1, \ldots, a_p)$
>
> alors f n'est pas continue en $a = (a_1, \ldots, a_p)$.

Exemple 1.2

La fonction $g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est-elle continue sur $\mathbf{R}^2$?

Etude pratique de la continuité

Soit $f : \begin{array}{ccc} U \subset \mathbf{R}^p & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_p) \end{array}$ et soit $a = (a_1, \ldots, a_p) \in U$.

• **Pour montrer que f n'est pas continue en a :**

On utilise un théorème précédent.

Pour $p = 2$, on cherche x et y fonctions telles que $\begin{cases} x(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} a_1 \\ y(t) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} a_2 \end{cases}$, mais $f(x(t), y(t)) \underset{t \to t_0}{\not\to} f(a_1, a_2)$.

• **Pour montrer que f est continue en a :**

1. On applique les théorèmes d'opérations sur U ou sur une partie de U, si possible.

2. En un point singulier :
   • On majore $|f(x) - f(a)|$:
   S'il existe une constante k telle que $|f(x)-f(a)| \leqslant k\|x-a\|$, alors directement $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$, donc f est continue en a.

   • Cas particulier important pour $p = 2$ et $a = (0, 0)$:
   On peut utiliser les coordonnées polaires, surtout en présence de $x^2 + y^2$.

   Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, alors on peut trouver $\rho \geqslant 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ tels que $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$ et dans ce cas $\rho = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   On majore alors $|f(x, y) - f(0, 0)|$ par une fonction de ρ (i.e de $\|(x, y)\|_2$) qui tend vers 0 quand $\rho \to 0$ (et ceci indépendamment de θ).

Exemple 1.3

Étude de la continuité sur $\mathbf{R}^2$ de :

$$f : \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array} \quad \text{et } g : \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} xy\ln(x^2 + y^2) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

Étude de la continuité sur $\mathbf{R}^3$ de $h : (x, y, z) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\sin(xyz)}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$

2 Fonctions de classe C^1

Remarque : U étant un ouvert, si $a \in U$ alors pour tout vecteur $h \in \mathbf{R}^p$ de norme suffisamment petite, $a + h \in U$.

Definition 2.1 *Dérivée selon un vecteur*

On dit que f admet une dérivée en $a \in U$ selon un vecteur $v \in \mathbf{R}^p$ lorsque l'application $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0. On note alors $\boxed{D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(a + tv) - f(a)}{t}}$ cette dérivée.

Definition 2.2 *Dérivées partielles*

Soit $a = (a_1, \dots, a_p) \in U \subset \mathbf{R}^p$ et soit $i \in [\![1, p]\!]$ et $f : \begin{array}{ccc} U \subset \mathbf{R}^p & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x = (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & f(x) = f(x_1, \dots, x_p) \end{array}$.

> On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 1 en a par rapport à sa i-ième variable si l'application $t \mapsto f(a + t\vec{e_i}) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_p)$ est dérivable en 0.
>
> On note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + t\vec{e_i}) - f(a)}{t} = D_{\vec{e_i}} f(a)$

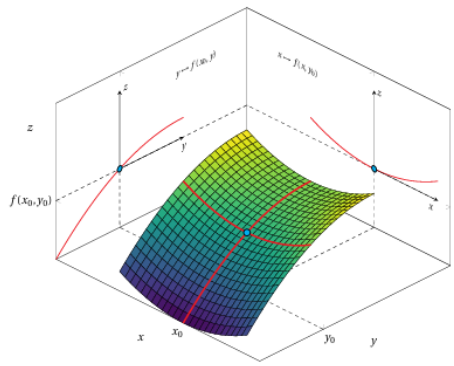
Ce qui revient à dire que f est dérivable en a selon le vecteur $\overrightarrow{e_i}$ de la base canonique de $\mathbf{R}^p$.

Remarque 2.1

Dériver la fonction $t \mapsto f(a + t\vec{e_i})$ en 0 revient à dériver en a_i la i-ème application partielle $f_{a,i}$ de f en a, ce qui revient à dériver f par rapport à sa i-ème variable en considérant les autres variables comme constantes :

$$\partial_i f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{e_i}) - f(a)}{t} = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f_{a,i}(x_i) - f_{a,i}(a_i)}{x_i - a_i}$$

Pour $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$, en un point (x_0, y_0) l'application partielle $f_{m_0,2} : t \mapsto f(x_0, t)$ se représente géométriquement par la courbe C_{x_0} intersection de la surface d'équation $z = f(x, y)$ et du plan d'équation $x = x_0$.
$\partial_2 f(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la pente de la tangente à la courbe C_{x_0} au point $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Remarque 2.2

Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x_i en tout point a de U, on peut définir la fonction dérivée partielle de f par rapport à x_i, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $\partial_i f$, par : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : \begin{array}{ccc} U \subset \mathbf{R}^p & \to & \mathbf{R} \\ x = (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{array}$

Definition 2.3 *Classe C^1*

> $f : U \subset \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite de classe C^1 sur U lorsque ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur U.

Proposition 2.1 *Développement limité à l'ordre 1*

Résultat admis

Si $f \in C^1(U, \mathbf{R})$ alors f admet en tout point $a \in U$ le développement limité à l'ordre 1 :

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \ldots + h_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) + o(\|h\|)$$

lorsque $h = (h_1, \ldots, h_p)$ tend vers $(0, \ldots, 0)$.

Proposition 2.2

Si f est de classe C^1 sur U alors f est continue sur U.

Definition 2.4 *Différentielle et gradient*

Soit $f \in C^1(U, \mathbf{R})$ et $a \in U$.

• On appelle **différentielle** de f en a la forme linéaire sur $\mathbf{R}^p$

$$\mathrm{d}f(a) : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^p & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ h = (h_1, \ldots, h_p) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{array}$$

L'image de h par l'application $\mathrm{d}f(a)$ se note $\mathrm{d}f(a).h$

• On appelle **gradient** de f en a, l'unique vecteur $\nabla f(a)$, tel que $\boxed{\forall h \in \mathbf{R}^p \quad \mathrm{d}f(a).h = \langle \nabla f(a) | h \rangle}$.

Remarque 2.3

Soit $f \in C^1(U, \mathbf{R})$ et $a \in U$.

• Le gradient de f en a est le vecteur $\nabla f(a)$ de coordonnées $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^p$:

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \overrightarrow{e_i}$$

• Le développement limité à l'ordre 1 de f en a s'écrit :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a) | h \rangle + o(\|h\|) = f(a) + \nabla f(a)^T.h + o(\|h\|)$$

Proposition 2.3 *Opérations algébriques sur les fonctions de classe C^1*

• L'ensemble $C^1(U, \mathbf{R})$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2, \quad \forall (f, g) \in C^1(U, \mathbf{R})^2, \quad \forall i \in [\![1, p]\!], \quad \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

• Si $(f, g) \in C^1(U, \mathbf{R}) \times C^1(U, \mathbf{R})$ alors $fg \in C^1(U, \mathbf{R})$ et

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

• Si $f \in C^1(U, \mathbf{R})$ et $\varphi \in C^1(I, \mathbf{R})$ avec $f(U) \subset I \subset \mathbf{R}$ alors $\varphi \circ f \in C^1(U, \mathbf{R})$ et

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \times (\varphi' \circ f)$$

Notamment $\partial_i \left(\dfrac{1}{f}\right) = \dfrac{-1}{f^2} \times \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

Méthode pratique pour étudier si f est de classe C^1

• En dehors d'un point singulier :

On tente d'appliquer les opérations sur les fonctions de classe C^1, ou bien on calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ et on étudie la continuité des dérivées partielles.

• En un point singulier

On calcule les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sur U tout entier, en un point singulier a, on passe par la dérivée en 0 de $t \mapsto f(a + t\vec{e_i})$, et on étudie la continuité des dérivées partielles par les techniques du paragraphe 1.

Exemple 2.1

La fonction $g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 en tout point $a = (x, y)$ de $\mathbf{R}^2$ mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$.

3 Règle de la chaine et applications

Proposition 3.1 *Règle de la chaine*

Soit $f : U \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ et soient p fonctions réelles $x_1, \dots, x_p$ définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.

Si f est de classe C^1 sur U et si $\Phi : t \in I \mapsto (x_1(t), \dots, x_p(t))$ est de classe C^1 sur I avec $\Phi(I) \subset U$

alors $f \circ \Phi : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & f(x_1(t), \dots, x_p(t)) \end{array}$ est de classe C^1 sur I avec

$$\forall t \in I, \quad (f \circ \Phi)'(t) = \sum_{i=1}^{p} x_i'(t).\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_p(t)) = \langle \nabla f(\Phi(t)) | \Phi'(t) \rangle$$

Exemple 3.1

1. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2xy - y^2$ et $g : t \mapsto f(t^2, e^t)$. Calculer $g'(0)$ de deux façons.

2. Soient $a \in \mathbf{R}^p$ et $\vec{v} \in \mathbf{R}^p$, dériver $g : t \mapsto f(a + t\vec{v})$ lorsque f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^p$.

Corollaire 3.2

Soit $f : U \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ de classe C^1 avec U un **ouvert convexe**.

f est constante sur U si, et seulement si, $\forall a \in U \quad \nabla f(a) = 0$.

Corollaire 3.3 *Changement de coordonnées*

On note U un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbf{R}^n$.
Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ on considère des fonctions $x_i : \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbf{R} \\ (u_1, \dots, u_n) & \mapsto & x_i(u_1, \dots, u_n) \end{array}$ de classe C^1 telles que $x_1(V) \times \dots \times x_p(V) \subset U$ et $f : U \to \mathbf{R}$ de classe C^1 sur U.

La fonction $g : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)) \end{array}$ est de classe C^1 sur V et

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad \frac{\partial g}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_n).\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n))$$

Exemple 3.2

Pour $f : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1, si $g(u, v) = f(au + bv, cu + dv)$ avec (a, b, c, d) fixé dans $\mathbf{R}^4$, alors

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) =$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) =$$

Exemple 3.3 *Passage aux coordonnées polaires*

Pour $g(r,\theta) = f(x,y) = f(r\cos(\theta), r\sin\theta)$ alors (sous de bonnes hypothèses)

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\ &\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\end{aligned}}$$

On note abusivement :

$$\left\{\begin{aligned} r\frac{\partial g}{\partial r} &= x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}\right. \quad \text{ou encore} \left\{\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}.\frac{\partial g}{\partial \theta}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}.\frac{\partial g}{\partial \theta}\end{aligned}\right.$$

et même en physique, on note par la même lettre la fonction f et la fonction g, ce qui donne :

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)...$$

Application : Trouver les fonctions f de classe C^1 sur $U = \mathbf{R}^2 - \{(x,y), x \leqslant 0\}$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles : $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

4 Applications géométriques

4.1 Courbes du plan

Une courbe du plan est donnée soit par :

- une paramétrisation $\varphi : t \in I \mapsto (x(t), y(t))$ (φ de classe C^1),
- une équation cartésienne : $f(x,y) = 0$ avec $f : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 sur l'ouvert U.

Definition 4.1

On appelle point régulier d'une courbe plane définie implicitement par l'équation $f(x,y) = 0$, tout point (x_0, y_0) en lequel le gradient de f n'est pas nul.

Proposition 4.1

En un **point régulier** $M_0 = (x_0, y_0)$, la tangente à la courbe plane d'équation $f(x,y) = 0$ est la droite passant par ce point et orthogonale au gradient de f en ce point.

La tangente a donc pour équation cartésienne :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y-y_0)=0}$$

Remarque 4.1

Soit $f : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 sur l'ouvert U.
On considère une ligne de niveau de f, c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) du plan vérifiant $f(x, y) = \lambda$, avec λ réel fixé.

Le gradient de f en un point a de la ligne de niveau $\mathscr{C}_\lambda$ est un vecteur orthogonal à$\mathscr{C}_\lambda$ (c'est-à-dire orthogonale à sa tangente en A). De plus le gradient est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f :
Pour $b = a + t\nabla f(a)$ avec $t > 0$ proche de 0 (résultat local), $f(b) > f(a)$.

4.2 Surfaces de $\mathbf{R}^3$

On considère ici une surface de l'espace $\mathbf{R}^3$ définie par une équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ avec $f : U \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 sur l'ouvert U.

Definition 4.2

1. On appelle point régulier de la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$, tout point en lequel le gradient de f n'est pas nul.
2. En un point régulier M_0, on appelle plan tangent en M_0 à la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ le plan passant par le point M_0 et orthogonal au gradient de f en M_0.

   Le plan tangent en un point M_0 régulier a donc pour équation cartésienne :

$$\boxed{(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)+(z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)=0}$$

Definition 4.3

On dit qu'une courbe définie par un paramétrage $\varphi : t \in I \subset \mathbf{R} \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ est tracée sur une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ lorsque $\forall t \in I, \quad f(x(t), y(t), z(t)) = 0$.

Proposition 4.2

Si Γ est une courbe régulière tracée sur une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ alors la tangente à Γ en un point M_0 est incluse dans le plan tangent en M_0 à la surface.

5 Fonctions de classe C^2

Si f est de classe C^1 sur l'ouvert U, alors les dérivées partielles d'ordre 1 de f, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ sont des fonctions définies et continues sur U à valeurs dans $\mathbf{R}$.

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, si $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 $\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$ alors cette dérivée est appelée dérivée partielle d'ordre 2 de f et on la note : $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ ou } \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \text{ lorsque } i = j}$

Definition 5.1

On dit que f est de classe C^2 sur l'ouvert $U \subset \mathbf{R}^p$ lorsque

f est de classe C^1 sur U et $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont de classe C^1 sur U.

Remarque 5.1 *Opérations algébriques*

On vérifie que si $f : U \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ et $g : U \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ sont de classe C^2 sur U alors $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ $\lambda f + \mu g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (avec g ne s'annulant pas sur U) sont de classe C^2 sur U.

Proposition 5.1 *Théorème de Schwarz*

Si $f : U \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ est de classe C^2 sur l'ouvert U alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Exemple 5.1

$f : (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$ admet des dérivées partielles d'ordre 2 en $(0,0)$ mais $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Definition 5.2 *Matrice Hessienne*

Soit $f : U \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ est de classe C^2, on appelle **matrice hessienne** de f en $a \in U$, la matrice symétrique

$$\boxed{H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}}$$

Proposition 5.2 *Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admis)*

Si $f : U \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ est de classe C^2 alors f admet un développement limité à l'ordre 2 en tout point $a \in U$ donné par la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$\boxed{f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^T.h + \frac{1}{2} h^T.H_f(a).h + o(\|h\|^2)}$$

6 Extrema d'une fonction de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$

Definition 6.1

Soit $f : U \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ et soit $a \in U$.

- On dit que f admet un minimum local en a si : $\exists r > 0, \quad \forall x \in B(a,r) \subset U \Longrightarrow f(a) \leqslant f(x)$.
- On dit que f admet un minimum global (ou absolu) en a si : $\forall x \in U, \quad f(a) \leqslant f(x)$.
- On dit que f admet un maximum local en a si : $\exists r > 0, \quad \forall x \in B(a,r) \subset U \Longrightarrow f(x) \leqslant f(a)$.
- On dit que f admet un maximum global (ou absolu) en a si : $\forall x \in U, \quad f(x) \leqslant f(a)$.

Definition 6.2 *Point critique*

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et soit $f \in C^1(U, \mathbf{R})$.

On dit que $a \in U$ est un point critique de f lorsque $\nabla f(a) = 0$

Proposition 6.1 *Condition nécessaire d'existence d'un extremum local*

Soit $f \in C^1(U, \mathbf{R})$ avec U un **ouvert** de $\mathbf{R}^p$ et soit $a \in U$.

Si f admet un extremum local en a alors a est un point critique,

$$\text{i.e } \forall i \in [\![1,p]\!] \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \ .$$

Remarque 6.1

La condition nécessaire précédente n'est pas suffisante : exemple avec $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$.

Proposition 6.2 *Condition suffisante d'existence d'un minimum local*

Soit $f : U \to \mathbf{R}$ avec U un **ouvert** de $\mathbf{R}^p$ et soit $a \in U$.

Si f est de classe C^2 sur l'ouvert U et si a est un point critique de f :

- Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbf{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a ;
- Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{+}(\mathbf{R})$, alors f n'a pas de minimum en a.

Remarque 6.2 *Adaptation au cas d'un maximum local*

Soit $f : U \to \mathbf{R}$ avec U un **ouvert** de $\mathbf{R}^p$ et soit $a \in U$.

Si f est de classe C^2 sur l'ouvert U et si a est un **point critique** de f :

- Si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbf{R})$, alors f atteint un maximum local strict en a ;
- Si $-H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{+}(\mathbf{R})$, alors f n'a pas de maximum en a.

Remarque 6.3 *Extrema et valeurs propres de la Hessienne*

Soit $f : U \to \mathbf{R}$ avec U un **ouvert** de $\mathbf{R}^p$ et soit $a \in U$.

Si f est de classe C^2 sur l'ouvert U et si a est un **point critique** de f :

• Si $Sp(H_f(a)) \subset]0, +\infty[$ alors f admet un **minimum local** en a.

• Si $Sp(H_f(a)) \subset]-\infty, 0[$ alors f admet un **maximum local** en a

• Si $H_f(a)$ admet une valeur propre strictement négative et une valeur propre strictement positive alors f n'admet pas d'extremum local en a

• Si 0 est valeur propre de $H_f(a)$, alors on ne peut rien dire, il faut étudier différemment le signe de $f(a+h) - f(a)$ pour h au voisinage de 0.

Exemple 6.1 *Explicitation dans le cas particulier $p = 2$*

Soit $f : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$de classe C^2 et $a \in U$ un point critique de f.

- Si $det(H_f(a)) > 0$ et $tr(H_f(a)) > 0$ alors f admet un minimum local strict en a.
- Si $det(H_f(a)) > 0$ et $tr(H_f(a)) < 0$ alors f admet un maximum local strict en a.
- Si $det(H_f(a)) < 0$ alors f n'a pas d'extremum local en a.
- Si $det(H_f(a)) = 0$ alors il faut étudier le signe de $f(a+h) - f(a)$ pour h proche de $(0, 0)$.

Rappel 6.1 *Existence d'un extremum sur une partie fermée bornée*

On rappelle que si $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ est continue sur une partie fermée bornée $A \subset \mathbf{R}^p$, alors f admet un maximum gobal et un minimum global sur A.

Remarque 6.4 **Etude pratique**

Soit $f : A \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ de classe C^2. Pour rechercher les extremums de f sur A, on regarde :

- **si A est un ouvert.**
  On cherche les points critiques $a \in A$ de f, ensuite on cherche la matrice hessienne de f en a, et on regarde ses valeurs propres dans le cas $p \geqslant 3$ ou son déterminant et sa trace dans le cas $p = 2$.

  Lorsque 0 est valeur propre de $H_f(a)$, on regarde le signe de $\delta(h) = f(a+h) - f(a)$, pour h au voisinage de 0 pour un extremum local, pour h quelconque pour un extremum global.
  - si $\delta(h) \geqslant 0$, f admet un minimum en a,
  - si $\delta(h) \leqslant 0$, f admet un maximum en a,
  - si $\delta(h)$ change de signe : $\forall r > 0, \quad \exists h_1 \in B(0,r) \quad \delta(h_1) > 0$ et $\exists h_2 \in B(0,r) \quad \delta(h_2) < 0$, alors f n'admet pas d'extremum en a et on dit que a est un point col (ou point selle).

- **si A est une partie fermée bornée.**

  On sait que f admet des extrema. On cherche d'abord les extrema dans l'intérieur de A : comme $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert, on applique la méthode précédente.
  Puis on cherche les extrema sur la frontière de A : $\delta(A) = \overline{A} \backslash \overset{o}{A}$.
  On compare alors les valeurs de f aux points critiques de $\overset{\circ}{A}$ et aux extrema de f sur la frontière de A pour conclure.

Exemple 6.2 *Applications*

1. Déterminer les extrema locaux de $f : (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto 3x^2 + 3xy + 2y^2$.
2. Déterminer les extrema locaux de $f : (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mapsto xy + yz + xz + x + y + 2z + 1$.
3. Déterminer sur $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ les extrema de : $f : (x,y) \mapsto x^3 + y^2$.