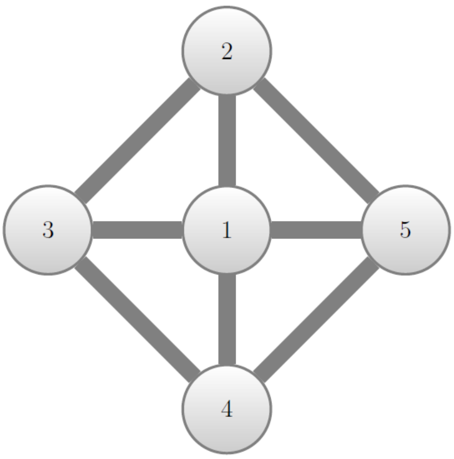
PSI - Samedi 15 mars 2025 - 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous aurez été amené à prendre.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve

Problème à traiter en 3 heures :

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ ($k \in \mathbf{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant k ($k \in \mathbf{N}$) dans la salle numéro i ($1 \leq i \leq 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i. On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant k. A titre d'exemple, on aura donc

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = \mathbf{P}(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = \mathbf{P}(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on introduit la matrice colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(S_k = 1) \\ \mathbf{P}(S_k = 2) \\ \mathbf{P}(S_k = 3) \\ \mathbf{P}(S_k = 4) \\ \mathbf{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{5,1}(\mathbf{R})$$

Pour une matrice B, B^T représente sa matrice transposée.

I - Premiers pas

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\mathbf{P}(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme combinaison linéaire des $\mathbf{P}(S_k = i)$ pour $i = 1, \ldots, 5$.

2. Expliciter la matrice carrée $B \in \mathscr{M}_5(\mathbf{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout entier naturel k.

3. En observant les colonnes de la matrice B, montrer que le réel 1 est valeur propre de B^T et expliciter un vecteur propre associé.

   On suppose que la loi de la variable S_0 est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   4. Montrer qu'alors les variables alétoires S_k ont toutes la même loi.

4. Est-ce que S_0 et S_1 sont indépendantes ?

II - Convergence dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|.\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leq \|x\|$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(I_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1})$$

où I_E représente l'endomorphisme identité de E.

5. Soit $x \in \ker(u - I_E)$. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x)$.

6. Soit $x \in \operatorname{Im}(u - I_E)$. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.

7. En déduire que $E = \ker(u - I_E) \oplus \operatorname{Im}(u - I_E)$.

8. Soit x un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p : E \to E$ ainsi définie.

   Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ identifié à $\mathbf{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on ait $\|AX\| \leq \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \tag{2}$$

où I_n est la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

9. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vers une matrice P, telle que $P^2 = P$.

III - Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 2$.

Définition 1 *On notera $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

Définition 2 *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0\ ; \tag{3}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

10. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.

11. En déduire que l'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.

12. Montrer que cet ensemble $\mathscr{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

    On munit l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ si $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

13. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Dans les questions 15 à 22, on note $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la matrice A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

14. Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.
    Indication : soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in [\![1,n]\!]$ un indice tel que $x_s = \max_{1\leqslant j\leqslant n} x_j$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

15. En déduire que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

16. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.

17. Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vers une matrice P, stochastique, de rang 1.

18. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est une matrice-ligne stochastique.

19. Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

20. Montrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.

21. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de A. *On pourra utiliser le résultat de la question 8.*

1 IV - Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie I en exploitant les résultats de la partie III.

On pose $A = B^T$ où B est la matrice construite dans la partie I.

Un calcul, qui n'est pas demandé, montre que les coefficients de la matrice A^2 sont tous strictement positifs.

22. Expliciter la limite P de la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ définie en (2).

23. Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[\![1, 5]\!]$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi (autrement dit, telle que la probabilité de présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants k, $k \in \mathbf{N}$).

On considère l'équation différentielle

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \tag{1}$$

où a et b sont des constantes réelles.

24. Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (1) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?

25. Montrer que si y est une solution de (1) sur I, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0. \tag{2}$$

26. Réciproquement, soit $t \longmapsto g(t)$ une solution de (2) sur $\mathbf{R}$. Montrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (1) sur I.

27. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (1) sur l'intervalle I.

On suppose *dans les deux questions suivantes uniquement* que $a = 1$ et $b = -4$.

28. Montrer que si y est solution de (1) sur J, alors $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (2) sur $\mathbb{R}$.
29. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (1) de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.