Exercice 1

Déterminer les réels α tels que la fonction $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} (x+y)^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

soit continue sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice 2

Étudier la continuité sur $\mathbf{R}^2$ des fonctions suivantes :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{|x-y|} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases} \qquad h : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$k : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 3

Soit $g : (x,y) \in U \mapsto \dfrac{1+x^2+y^2}{y}\sin(y)$ avec $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad y \neq 0\}$.

1. Montrer que U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.
2. Peut-on prolonger g par continuité sur $\mathbf{R}^2$?

Exercice 4

Soit $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$ et admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice 5

Trouver les fonctions $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 vérifiant :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + 4yz + 2xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4xz + x^2 + z \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4xy + y \end{cases}$$

Exercice 6

1. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1, justifier que $g : (x,u) \mapsto f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$ et exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en fonction de celles de f.

2. En déduire les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 vérifiant l'équation aux dérivées partielles :
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
b
3. Déterminer aussi les fonctions $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^1 vérifiant l'équation aux dérivées partielles :
$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Exercice 7

Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x} - xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ en utilisant le changement de variables $(u, v) = (x, ye^{\frac{x^2}{2}})$.

Exercice 8

Dans les trois cas suivants, montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$:

- $f : (x, y) \mapsto \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)\mathrm{d}t$ avec $\varphi \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
- $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ g'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$ avec $g \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

On pourra montrer que $f(x, y) = \displaystyle\int_0^1 g'(x + t(y - x))\,dt$.

- $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Exercice 9

Soit $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{y}{1 + x^2} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. f est-elle continue sur $\mathbf{R}^2$? de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$?
2. Déterminer les lignes de niveau de f.

Exercice 10

- Déterminer la tangente au point $(1, 2)$ de la courbe d'équation $x\ln(y) + y\ln(x) = \ln(2)$.
- Soit $f : (x, y, z) \mapsto \dfrac{\arctan(xyz)}{1 + (xyz)^3}$. Déterminer le plan tangent en $(1, 1, 1)$ à la surface d'équation $f(x, y, z) = \dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 11

Soit S la surface d'équation $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ et D la droite d'équations $\begin{cases} z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$. Déterminer les points M de S tels que le plan tangent à S en M est parallèle à D.

Exercice 12

Déterminer les fonctions $f \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - f = 0$.

Exercice 13

Déterminer les fonctions $\varphi \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telles que la fonction $f : (x, y) \mapsto \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ vérifie sur $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{y}{x^3}$.

Exercice 14

Soit $f \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Montrer que l'application $g : (x, y) \mapsto \displaystyle\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, 0)\mathrm{d}t$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$ avec $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x} = -\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 15

Pour $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, on pose $f(a, b) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(x^2 - ax - b)^2}{1 + x}\mathrm{d}x$.

1. Sans calculs, justifier que f admet un minimum global sur $\mathbf{R}^2$.
2. Déterminer le point (a, b) en lequel ce minimum est atteint.

Exercice 16

Soit $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. f admet-elle un maximum global sur $\mathbf{R}^2$? un minimum global sur $\mathbf{R}^2$?
3. Étudier les extrema locaux de f.

Exercice 17

Soit $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^2 y + \ln(4 + y^2)$.

1. Montrer que f admet un unique point critique.
2. Évaluer f sur des droites passant par ce point critique. La restriction de f à ces droites y possède-t-elle un extremum ?
3. On pose $e(x) = f(x, x^3) - f(0, 0)$. Trouver un équivalent simple de e en 0.
4. f possède-t-elle des extrema locaux ?
5. f est-elle bornée ?

Exercice 18

1. Soit $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.
   (a) Déterminer les points critiques de f.
   (b) Déterminer les bornes inférieures et supérieures de f sur $\mathbf{R}^2$.

2. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de E, on définit $f : x \in E \mapsto \langle u(x)|x\rangle e^{-\|x\|^2}$.
   Déterminer les bornes inférieures et supérieures de f sur E.

Exercice 19

Soit $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$.

1. Étudier les extrema locaux et globaux de f sur ${}_r r^2$.
2. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant x\}$. Représenter D.
3. Étudier les extrema locaux et globaux de f sur D.