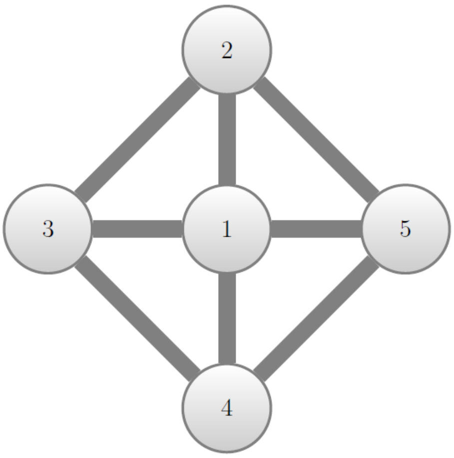
Un corrigé du D.S. 07 : CCMP PC/PSI 2017 - Maths I

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ ($k \in \mathbf{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant k ($k \in \mathbf{N}$) dans la salle numéro i ($1 \leq i \leq 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i. On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant k. A titre d'exemple, on aura donc

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = \mathbf{P}(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = \mathbf{P}(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on introduit la matrice colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(S_k = 1) \\ \mathbf{P}(S_k = 2) \\ \mathbf{P}(S_k = 3) \\ \mathbf{P}(S_k = 4) \\ \mathbf{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{5,1}(\mathbf{R})$$

Pour une matrice B, B^T représente sa matrice transposée.

I - Premiers pas

1. D'après l'énoncé, $((S_k = i))_{i \in [\![1,5]\!]}$ est un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales, on sait que :

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = 1) = \sum_{i=1}^{5} \mathbf{P}((S_{k+1} = 1) \cap (S_k = i)) = \sum_{i=1}^{5} \mathbf{P}(S_k = i) \mathbf{P}_{(S_k = i)}(S_{k+1} = 1)$$

donc $\mathbf{P}(S_{k+1}=1)$ est une combinaison linéaire des $\mathbf{P}(S_k=i)$ pour $i=1,\dots,5$.

On peut aller un peu plus loin (mais était-ce nécessaire ?) puisqu'avec les données de l'énoncé, on sait que $\mathbf{P}(S_{k+1}=1|S_k=1)=0$ et si le rat est à l'instant k en salle 2 ou 3 ou 4 ou 5 alors il peut ensuite aller dans trois autres salles, dont la salle 1, avec équiprobabilité.

$$\forall i \in [\![2,5]\!] \quad \mathbf{P}(S_{k+1}=1|S_k=i)=\frac{1}{3}$$

donc

$$\mathbf{P}(S_{k+1}=1)=0\mathbf{P}(S_k=1)+\sum_{i=2}^{5}\frac{1}{3}\mathbf{P}(S_k=i)$$

2. Comme dans la question ci-dessus on trouve plus largement avec le même système complet d'événements et la formule des probabilités totales :

$$\forall i \in [\![1,5]\!] \quad \mathbf{P}(S_{k+1}=i)=\sum_{j=1}^{5}\mathbf{P}(S_k=j)\mathbf{P}(S_{k+1}=i|S_k=j)$$

Ce qui s'écrit matriciellement : $X_{k+1}=B.X_k$ avec $B=(b_{ij})$ telle que

$$\forall (i,j)\in [\![1,5]\!]^2 \quad b_{ij}=\mathbf{P}_{(S_k=j)}(S_{k+1}=i)=\mathbf{P}(S_{k+1}=i|S_k=j)$$

Avec les données de l'énoncé, lorsque le rat se trouve à l'instant k en salle 1 il peut aller avec équiprobabilité vers 4 autres salles, lorsque le rat se trouve en salle 2,3,4 ou 5 il peut aller vers trois autres salles avec équiprobabilité, donc

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant indépendante de k, on a : $\forall k \in \mathbf{N} \quad X_{k+1}=BX_k$.

3. On remarque que la somme des coefficients de chaque colonne de B est égale à 1 (*ce qui est normal puisqu'une probabilité conditionnelle est une probabilité*). On en déduit que la somme des coefficients de chaque ligne de B^T vaut 1, ce qui revient à écrire $B^T\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$.

$$\boxed{1 \text{ est donc une valeur propre de } B^T \text{ et un vecteur propre associé est } \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}.}$$

On suppose que la loi de la variable S_0 est donnée par

$$X_0=\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix} \tag{1}$$

4. Par calculs, $X_1 = BX_0 = X_0$, si on suppose que pour k fixé $X_k = X_0$, alors

$$X_{k+1} = BX_k = BX_0 = X_0$$

On a montré par récurrence que $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad X_k = X_0$, ce qui revient à dire que pour

$\boxed{\text{tout } k \in \mathbf{N}^* \text{ la variable } S_k \text{ suit la même loi que } S_0.}$

4. Par définition

$$\begin{aligned} S_1 \text{ et } S_0 \text{ sont indépendantes} &\iff \forall (i,j) \in [\![1,5]\!]^2 \quad \mathbf{P}((S_1 = i) \cap (S_0 = j)) = \mathbf{P}(S_1 = i).\mathbf{P}(S_0 = j) \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1,5]\!]^2 \quad \mathbf{P}(S_1 = i | S_0 = j) = \mathbf{P}(S_1 = i) \end{aligned}$$

D'après l'énoncé $\mathbf{P}(S_1 = 1 | S_0 = 1) = 0$ or puisque S_1 et S_0 suivent la même loi on a $\mathbf{P}(S_1 = 1) = \mathbf{P}(S_0 = 1) = \dfrac{1}{4} \neq 0$ donc $\boxed{S_0 \text{ et } S_1 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

II - Convergence dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|.\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leq \|x\|$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(I_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1})$$

où I_E représente l'endomorphisme identité de E.

5. Soit $x \in \ker(u - I_E)$. On a $u(x) = x$ et si $u^n(x) = x$ alors $u^{n+1}(x) = u(u^n(x)) = u(x) = x$ donc $\forall l \in \mathbf{N} \quad u^l(x) = x$, et $r_k(x) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{l=0}^{k-1} u^l(x) = \dfrac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} x = \dfrac{k}{k}x = x$.

   On en déduit immédiatement : $\boxed{\lim\limits_{k \to +\infty} r_k(x) = x}$

6. Soit $x \in Im(u - I_E)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = (u - I_E)(y) = u(y) - y$, par linéarité de u : $\forall l \in \mathbf{N} \quad u^l(x) = u^{l+1}(y) - u^l(y)$, donc

$$r_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^{l+1}(y) - u^l(y) = \frac{1}{k}\left(u^k(y) - y\right)$$

   Par inégalité triangulaire :

$$\|r_k(x)\| \leqslant \frac{1}{k}\left(\|u^k(y)\| + \|y\|\right)$$

On sait que $\forall z \in E \quad \|u(z)\| \leqslant \|z\|$, alors si $\|u^k(z)\| \leqslant \|z\|$ pour k fixé on aura $\|u^{k+1}(z)\| = \|u(u^k(z))\| \leqslant \|u^k(z)\| \leqslant \|z\|$, on a ainsi montré par récurrence que $\forall z \in E \quad \forall k \in \mathbf{N}^* \quad \|u^k(z)\| \leqslant \|z\|$ et donc

$$0 \leqslant \|r_k(x)\| \leqslant \frac{2\|y\|}{k}$$

Or $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{2\|y\|}{k} = 0$, donc par théorème d'encadrement $\lim\limits_{k\to+\infty} \|r_k(x)\| = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E}$

7. $0_E \in \ker(u - I_E) \cap Im(u - I_E)$ (intersection de deux sous-espaces vectoriels de E).
Soit $x \in \ker(u - I_E) \cap Im(u - I_E)$, d'après par les questions 5 et 6 on a :

$$x = \lim_{k\to+\infty} r_k(x) = 0$$

Donc $\ker(u - I_E) \cap Im(u - I_E) = \{0\}$. Et par le théorème du rang on sait que

$dim(E) = dim \ker(u - I_E) + dim Im(u - I_E)$, donc finalement $\boxed{E = \ker(u - I_E) \oplus \operatorname{Im}(u - I_E)}$

8. Soit $x \in E$, d'après l'égalité précédente, il existe $y \in \ker(u - I_E)$ et il existe $z \in Im(u - I_E)$ tels que $x = y + z$, or par combinaison linéaire d'endomorphismes r_k est un endomorphisme de E donc $\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad r_k(x) = r_k(y) + r_k(z)$.
Par les questions 5 et 6, les suites $(r_k(y))_{k\in\mathbf{N}^*}$ et $(r_k(z))_{k\in\mathbf{N}^*}$ convergent, alors par somme la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge avec

$$\lim_{k\to+\infty} r_k(x) = \lim_{k\to+\infty} r_k(y) + \lim_{k\to+\infty} r_k(z) = y + 0 = y$$

D'après $E = \ker(u - I_E) \oplus Im(u - I_E)$, le vecteur y, tel que $x = y + z$ avec $y \in \ker(u - I_E)$ et $z \in Im(u - I_E)$, est le projeté de x sur $\ker(u - I_E)$ parallèlement à $Im(u - I_E)$.

La suite $(r_k(x))_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge donc vers le vecteur $p(x)$ avec $p : E \to E$ la projection sur $\ker(u - I_E)$ parallèlement à $Im(u - I_E)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ identifié à $\mathbf{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on ait $\|AX\| \leq \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \tag{2}$$

où I_n est la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

9. En notant u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à A et r_k l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à R_k, et en identifiant $\mathbf{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on peut écrire $u(x) = AX$ et $r_k(x) = R_kX$ avec

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l$$

par hypothèse $\|AX\| \leqslant \|X\|$ donc $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$.
D'après le résultat de **8.** : $\forall x \in \mathbf{R}^n \quad \lim\limits_{k \to +\infty} r_k(x) = p(x)$ avec p la projection sur $\ker(u - I_E)$ parallèlement à $Im(u - I_E)$, ce qui donne matriciellement

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad \lim_{k \to +\infty} R_k X = PX$$

avec P la matrice dans la base canonique de la projection p citée. P est la matrice d'une projection, donc P vérifie $P^2 = P$.

Rappelons que $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie *et les coefficients d'une matrice sont ses coordonnées dans la base canonique des matrices élémentaires $E_{i,j}$, donc une suite de matrices $(M_p)_{p \in \mathbf{N}}$ convberge vers une matrice M* **SSI** *les suites des coefficients des matrices M_p convergent vers les coefficients de même indice de la matrice M.*

En prenant pour X les vecteurs E_i de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on a : $R_k E_i$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne de R_k et PE_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de P, donc en notant $r_{i,j}^{(k)}$ le coefficient placé sur la ligne i et colonne j de R_k et $p_{i,j}$ celui de P, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} r_{i,j}^{(k)} = p_{i,j}$, donc $\lim\limits_{k \to +\infty} R_k = P$.

$$\boxed{\text{La suite de matrices } (R_k)_{k \in \mathbf{N}^*} \text{ converge dans } \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \text{ vers une matrice } P, \text{ telle que } P^2 = P.}$$

III - Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 2$.

Définition 1 *On notera $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

Définition 2 *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \ a_{i,j} \geqslant 0 \ ; \tag{3}$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

10. On peut écrire $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad u_i = 1$, alors $AU = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} u_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j} u_j \end{pmatrix}$. Deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux, donc

$$AU = U \iff \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} u_j = u_i \iff \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

11. Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ dans l'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n). Avec le résultat de la question précédente on a immédiatement :

$$(AB)U = A(BU) = AU = U$$

donc AB vérifie (4). De plus en notant $AB = (c_{i,j})$ on sait que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$, par hypothèse les coefficients des matrices A et B sont positifs donc $c_{i,j} \geqslant 0$ et AB est encore une matrice stochastique, donc $\boxed{\text{l'ensemble } \mathscr{E} \text{ des matrices stochastiques est stable pour le produit matriciel.}}$

12. Soit $(A_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{E}$ qui converge vers une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

• D'après le rappel fait en question 9, en notant $A = (a_{i,j})$ et $A_p = (\alpha_{i,j}^{(p)})$, on a $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{i,j} = \lim\limits_{p\to+\infty} \alpha_{i,j}^{(p)} \geqslant 0$. A est donc à coefficients positifs.

L'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ M & \mapsto & MU \end{array}$ est linéaire et les espaces sont de dimension finie alors elle est continue et donc $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p U = AU$ or $\forall p \in \mathbf{N} \quad A_p U = U$, par unicité de la limite on obtient : $AU = U$. A est donc une matrice stochastique et par caractérisation séquentielle

$\boxed{\text{l'ensemble } \mathscr{E} \text{ est une partie fermée de } \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).}$

Autre argumentation possible :

Par définition $\mathscr{E} = \left\{ (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{i,j} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \right\}$.

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, on définit $\varphi_{i,j} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \to & \mathbf{R} \\ A = (a_{k,\ell}) & \mapsto & a_{i,j} \end{array}$ et pour $i \in [\![1,n]\!] \quad \psi_i : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \to & \mathbf{R} \\ A = (a_{k,\ell}) & \mapsto & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} \end{array}$.

Ces $n^2 + n$ applications sont linéaires avec $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $\mathbf{R}$ de dimension finie, donc ces applications sont continues.
$[0, +\infty[$ et $\{1\} = [1,1]$ sont des parties fermées de $\mathbf{R}$, alors par image réciproque de parties fermées par des applications continues et intersection de parties fermées,

$\mathscr{E} = \left(\bigcap\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \varphi_{i,j}^{-1}([0,+\infty[) \right) \cap \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \psi_i^{-1}(\{1\}) \right)$ est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

• Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ dans l'ensemble $\mathscr{E}$ et $t \in [0,1]$, on note $M = (1-t)A + tB = (m_{i,j})$, alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad m_{i,j} = (1-t)a_{i,j} + tb_{i,j} \geqslant 0$ par somme de produits de réels positifs.
De plus $AU = U$ et $BU = U$ donc $MU = (1-t)AU + tBU = (1-t)U + tU = U$, finalement $MU = U$ et $M \in \mathscr{E}$. $\boxed{\text{L'ensemble } \mathscr{E} \text{ est donc une partie convexe de } \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).}$

On munit l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{max} |x_i|$ si $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

13. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice stochastique et $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On sait que

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j \end{pmatrix} \text{ alors } \|AX\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right|.$$

Par inégalité triangulaire :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}x_j|$$

A étant stochastique $|a_{i,j}| = a_{i,j}$ et donc

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j|$$

Par définition $\forall j \in [\![1,n]\!] \quad |x_j| \leqslant \|X\|_\infty$ et par positivité des coefficients de A on a

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\|X\|_\infty = \|X\|_\infty \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

Or $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$, donc $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_i\right| \leqslant \|X|_\infty$ et finalement $\boxed{\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty.}$

Dans les questions 15 à 22, on note $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la matrice A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

14. Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in [\![1,n]\!]$ un indice tel que $x_s = \max_{1\leqslant j\leqslant n} x_j$.

    Notons $A^p = (\alpha_{i,j})$, par hypothèse $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \alpha_{i,j} > 0$ et puisque $\mathscr{E}$ est stable par produit, $A^p \in \mathscr{E}$.
    On sait que $A^pX = X$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}x_j$, en particulier $x_s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{s,j}x_j$.
    Par définition $\forall j \in [\![1,n]\!] \quad x_j \leqslant x_s$ et $\alpha_{s,j} \geq 0$ donc

    $$x_s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{s,j}x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_{s,j}x_s = x_s\sum_{j=1}^{n} \alpha_{s,j} = x_s$$

    Finalement dans ce qui précède l'inégalité est une égalité donc

    $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{s,j}x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{s,j}x_s$$

et donc $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{s,j}(x_s - x_j) = 0$. Une somme de termes tous positifs est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls donc

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad \alpha_{s,j}(x_s - x_j) = 0$$

or $\alpha_{s,j} > 0$ donc $\forall j \in [\![1,n]\!] \quad x_j = x_s$.

On a donc montré que si $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \ker(A^p - I_n)$ alors $X = x_s U$ donc $\ker(A^p - I_n) \subset \mathrm{Vect}(U)$.
Réciproquement puisque $A^p \in \mathscr{E}$ on a : $A^p U = U$ donc $U \in \ker(A^p - I_n)$.

Finalement $\boxed{\ker(A^p - I_n) = \mathrm{Vect}(U) \text{ est de dimension 1.}}$

15. Puisque $AU = U$ on sait que $\mathrm{Vect}(U) \subset \ker(A - I_n)$.
Soit $X \in \ker(A - I_n)$, alors $AX = X$ et par récurrence $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad A^k X = X$ donc $A^p X = X$ ce qui donne $\ker(A - I_n) \subset \ker(A^p - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$ donc $\boxed{\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U).}$

16. $\mathscr{E}$ est stable par produit et $A \in \mathscr{E}$, alors $\forall \ell \in \mathbf{N}^* \quad A^\ell \in \mathscr{E}$. On a aussi $I_n \in \mathscr{E}$.
Pour $k \in \mathbf{N}^* \quad \frac{1}{k} > 0$, donc les coefficients de la matrice $R_k = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell$ sont tous positifs.
De plus $R_k U = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell U = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1} U = U$, donc $\boxed{\forall k \in \mathbf{N}^* \quad R_k \in \mathscr{E}.}$

17. $\| \quad \|_\infty$ est telle que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad \|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$, alors par application des résultat des questions 8 et 9, la suite $(R_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vers P matrice de la projection sur $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U) = Im(P)$ parallèlement à $Im(A - I_n) = \ker(P)$. Par définition P est de rang égal à $dim\mathrm{Im}(P)$, P est donc de rang égal à $dim \ker(A - I_n) = 1$.

$\mathscr{E}$ est une partie fermée et la suite (R_k) est une suite convergente de matrices de $\mathscr{E}$, on sait alors que sa limite P est dans $\mathscr{E}$.

$$\boxed{\text{La suite } (R_k)_{k \in \mathbf{N}^*} \text{ converge donc dans } \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \text{ vers une matrice } P\text{, stochastique, de rang 1.}}$$

18. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de P, alors $Im(P) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_n)$, mais on a aussi par la question 17 que $Im(P) = \ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$ donc

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \exists \lambda_i \in \mathbf{R} \quad C_i = \lambda_i U$$

et finalement $\boxed{P = \begin{pmatrix} \lambda_1 U & \cdots & \lambda_n U \end{pmatrix} = UL, \text{ où } L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}).}$

P est stochastique donc tous ses coefficients sont positifs et $PU = U$, alors
$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad C_i = \lambda_i U \Longrightarrow \lambda_i \geqslant 0$ et $PU = ULU = U\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = U \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$

Finalement $\boxed{L \text{ est stochastique.}}$

19. P est la matrice de la projection sur $Im(P) = \ker(A - I_n)$ parallèlement à $Im(A - I_n) = \ker(P)$. $Im(A - I_n) = \ker(P)$ alors $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad P(A - I_n)X = 0$. Or en notant $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad P(A - I_n)E_i$ est la $i^{\text{ième}}$ colonne de $P(A - I_n)$ donc $P(A - I_n)$ est la matrice nulle. On a bien $\boxed{PA = P}$

$PA = P \Longleftrightarrow ULA = UL$ avec LA matrice-ligne et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$PA = P \Longleftrightarrow ULA = UL \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} LA \\ \vdots \\ LA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ \vdots \\ L \end{pmatrix} \Longleftrightarrow LA = L$$

$\boxed{L \text{ est une matrice-ligne stochastique telle que } LA = L.}$

Soit $L_1 = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ une matrice-ligne stochastique ($\forall j \in [\![1, n]\!] \quad a_j \geqslant 0$ et $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$) telle que $L_1 A = L_1$, en raisonant comme en question 16, on obtient $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad L_1 R_k = L_1$ et par continuité de l'application linéaire $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto L_1 M$, on a $L_1 = \lim_{k \to +\infty} L_1 R_k = L_1 P = L_1 UL$.

Or $L_1.U = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_j = 1$, donc $L_1 = L$.

$\boxed{L \text{ est la seule matrice-ligne stochastique telle que } LA = L.}$

20. La matrice-ligne L est stochastique donc tous ses coefficients sont positifs et leur somme est égale à 1.

Supposons qu'il existe $j \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_j = 0$. Puisque $LA = L$, on a $LA^p = L$ et en notant $A^p = (\alpha_{i,j})$ on a en particulier $0 = \lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_{i,j}$. On sait que tous les coefficients de A^p sont strictement positifs et ceux de L sont positifs donc

$$LA^p = L \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_{i,j} = 0 \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_i \alpha_{i,j} = 0 \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_i = 0$$

ce qui est absurde puisque $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$). $\boxed{\text{On a montré par l'absurde que } \forall j \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_j > 0.}$

21. On a vu en question 15 que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$ alors 1 est valeur propre de A.

 En notant u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à A, d'après la question 8 on sait que $\mathbf{R}^n = \ker(u - Id) \oplus Im(u - Id)$ avec $\ker(u - Id) = \ker(A - I_n)$ en identifiant $\mathbf{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

 u commute avec $u - Id$, alors $\ker(u - Id)$ et $Im(u - Id)$ sont stables par u et la matrice de u dans une base adaptée à $\mathbf{R}^n = \ker(u - Id) \oplus Im(u - Id)$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec B la matrice de v l'endomorphisme induit par u sur $Im(u - Id)$.
 En notant χ_u et χ_v les polynômes caractéristiques respectifs de u et v on a $\chi_u = (X - 1)\chi_v$.

 On a aussi $\ker(v - Id) = \{x \in Im(u - Id), \quad v(x) = u(x) = 0\} = Im(u - Id) \cap \ker(u - Id) = \{0\}$, donc 1 n'est pas valeur propre de v et donc 1 n'est pas racine de χ_v, on en déduit que la multiplicité de la racine 1 de χ_u est égale à 1.

 $\boxed{\text{1 est une valeur propre simple de la matrice } A.}$

1 IV - Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie I en exploitant les résultats de la partie III.

On pose $A = B^T$ où B est la matrice construite dans la partie I.

Un calcul, qui n'est pas demandé, montre que les coefficients de la matrice A^2 sont tous strictement positifs.

22. On peut appliquer tous les résultats de la partie III, alors $P = \lim\limits_{k \to +\infty} R_k$ s'écrit $P = UL$ avec L unique matrice-ligne stochastique telle que $LB^T = L$, ce qui est équivalent à $B.L^T = L^T$.
 En question 4 on a vu $BX_0 = X_0$ et les coefficients de la matrice-colonne X_0 sont positifs et de somme égale à 1, donc $X_0 = L^T$ et $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$ donc

$$P = UL = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

23. D'après la partie I la loi de probabilité sur l'ensemble $[\![1, 5]\!]$ de S_0 donnée par $X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}$ est telle que les variables S_k suivent toutes la même loi.

Réciproquement supposons donnée une loi $X_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(S_0 = 1) \\ \mathbf{P}(S_0 = 2) \\ \mathbf{P}(S_0 = 3) \\ \mathbf{P}(S_0 = 4) \\ \mathbf{P}(S_0 = 5) \end{pmatrix}$ telle que

$\forall k \in \mathbf{N}^* \quad X_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(S_k = 1) \\ \mathbf{P}(S_k = 2) \\ \mathbf{P}(S_k = 3) \\ \mathbf{P}(S_k = 4) \\ \mathbf{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} = X_0$, alors en particulier $X_1 = BX_0 = X_0$ or X_0 est une matrice-colonne stochastique et $A = B^T$ est une matrice stochastique telle que A^2 est à coefficients strictement positifs. La partie III donne l'unicité de $X_0 = L^T$ telle que $LA = L$ avec L matrice-ligne stochastique.

Il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[\![1, 5]\!]$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi.

PSI - Samedi 15 mars 2025 - 3+1 heures

On considère l'équation différentielle

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \tag{1}$$

où a et b sont des constantes réelles.

24. Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (1) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?

25. Montrer que si y est une solution de (1) sur I, alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0. \tag{2}$$

26. Réciproquement, soit $t \longmapsto g(t)$ une solution de (2) sur $\mathbf{R}$. Montrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (1) sur I.

27. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (1) sur l'intervalle I.

On suppose *dans les deux questions suivantes uniquement* que $a = 1$ et $b = -4$.

28. Montrer que si y est solution de (1) sur J, alors $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (2) sur $\mathbb{R}$.
29. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (1) de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.