Je vous demande de traiter les questions dans l'ordre donné ci-dessous (et non par numéro des questions).

On note E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ converge.

Pour $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, on note p_α la fonction $\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}_+^* & \to & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & t^\alpha\end{array}\right.$

I-A - Des fonctions de E utiles pour la suite

Q 1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, p_α appartient à E.

Q 2. Soit P une fonction polynomiale non identiquement nulle à coefficients réels. Montrer que la restriction de P à $\mathbf{R}_+^*$ appartient à E si et seulement si $P(0) = 0$.

Q 3. Soient a et b deux nombres réels. Montrer que la fonction $\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}_+^* & \to & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & ae^t + b\end{array}\right.$ appartient à E si et seulement si $a = b = 0$.

Q 4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, la fonction $\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R}_+^* & \to & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & (e^t-1)^2\dfrac{e^{-t}}{t}\end{array}\right.$ est intégrable sur $]0, x]$.

Q 5. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ et tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, on note $k_x(t) = e^{min(x,t)} - 1$ où $min(x,t)$ désigne le plus petit des réels x et t. Représenter graphiquement la fonction k_x. Montrer que k_x appartient à E.

II - Structure préhilbertienne de E

Q 9. Montrer que si f et g sont deux fonctions de E, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Q 10. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $C(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$ des fonctions continues sur $\mathbf{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Pour toutes fonctions $f \in E$ et $g \in E$, on pose $\displaystyle\langle f|g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

Q 11. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

La norme $\|.\|$ associée à ce produit scalaire est donc définie pour toute fonction $f \in E$ par

$$\|f\| = \left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

Q 12. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \|k_x\| = 0$. On rapelle que, pour tout $x > 0$, $k_x(t) = e^{min(x,t)} - 1$.

Q 13. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = k!$.

Q 14. On rappelle que les fonctions p_α ont été définies dans les notations en tête du sujet. La famille $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est-elle une famille orthogonale de E ?

I-B *Une condition suffisante d'appartenance à* E

Dans cette sous-partie, on suppose que f est une fonction de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^1 vérifiant :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \\ \exists C > 0, \quad \forall x > 0 \quad |f'(x)| \leqslant C\dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

Q 6. Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose $\Phi(x) = \dfrac{4\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x} - \displaystyle\int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. Montrer que Φ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$, que $\lim\limits_{x\to 0}\Phi(x) = 0$, et que, pour tout $x > 0$, $\Phi'(x) \geqslant 0$. En déduire que $\Phi(x) \geqslant 0$ pour tout $x > 0$.

Q 7. Montrer que, pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leqslant 4C\dfrac{\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}$.

Q 8. En déduire que $f \in E$.

III - Un opérateur sur E

Á chaque fonction $f \in E$, on associe la fonction $U(f)$ définie pour tout $x > 0$ par

$$U(f)(x) = \langle k_x | f\rangle = \int_0^{+\infty} (e^{min(x,t)} - 1) f(t)\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$$

Q 15. Á l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour toute fonction $f \in E$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} U(f)(x) = 0$$

Q 16. Montrer que pour toute fonction $f \in E$ et pour tout $x > 0$

$$U(f)(x) = \int_0^x (1 - e^{-t})\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t + (e^x - 1)\int_x^{+\infty} f(t)\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$$

Q 17. Soit $f \in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et vérifie, pour tout $x > 0$

$$(U(f))'(x) = e^x \int_x^{+\infty} f(t)\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$$

Dans la suite, pour alléger les notations, la dérivée de $U(f)$ est notée $U(f)'$.

Q 18. Soit $f \in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$ et que la fonction $U(f)$ est solution sur $\mathbf{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$y'' - y' = -\frac{f(x)}{x}$$

Q 19. Montrer que pour tout $f \in E$ et pour tout $x > 0$,

$$|U(f)'(x)| \leqslant e^x \|f\| \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t \right)^{1/2} \leqslant \|f\| \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}$$

Q 20. Déduire de ce qui précède que U est un endomorphisme de E et que, pour tout $f \in E$ et tout $x > 0$

$$|U(f)(x)| \leqslant 4\|f\| \frac{\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}$$

Q 21. En déduire que pour tout $f \in E$, $\|U(f)\| \leqslant 4\|f\|$.

Q 22. Montrer que U est injectif.

Q 23. L'endomorphisme U est-il surjectif ?