9.6 $t \mapsto \dfrac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}$ est C^0 sur $]0,x]$ pour $x>0$ IB

$$\frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}}$$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable en 0 (intégrales de Riemann)

$t \mapsto \dfrac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,x]$.

notons F une primitive de $t \mapsto \dfrac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}$, on a

$$\phi(x) = \frac{4\sqrt{x}\,e^{x/2}}{1+x} - \left(F(x) - \lim_0 F\right)$$

Par produit et quotient de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ $x \longmapsto \dfrac{4\sqrt{x}\,e^{x/2}}{1+x}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et F est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc ϕ est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\sqrt{x}\,e^{x/2}}{1+x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} \phi(x) = 0 - \left(\lim_0 F - \lim_0 F\right) = 0$$

$$\phi'(x) = \frac{4\,e^{x/2}}{1+x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{2}\,e^{x/2}\,\frac{\sqrt{x}}{1+x} - \frac{4\sqrt{x}\,e^{x/2}}{(1+x)^2} - F'(x)$$

$$\phi'(x) = \frac{2\,e^{x/2}}{\sqrt{x}\,(1+x)} + 2\,\frac{e^{x/2}\sqrt{x}}{1+x} - \frac{4\sqrt{x}\,e^{x/2}}{(1+x)^2} - \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}\,(1+x)^2}\left[2(1+x) + 2x(1+x) - 4x - (1+x)^2\right]$$

$$= \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}\,(1+x)^2}\left(2 + 2x + 2x + 2x^2 - 4x - 1 - x^2 - 2x\right)$$

$$\phi'(x) = \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}(1+x)^2}\left(1 - 2x + x^2\right) = \frac{(x-1)^2 e^{x/2}}{\sqrt{x}(1+x)^2} \geq 0$$

ϕ est donc croissante avec $\lim\limits_{0} \phi = 0$

donc $\phi(x) \geq 0$ pour $x > 0$.

q.7 : $\exists c > 0 \ \forall x > 0 \quad |f'(x)| \leq \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}$

f' est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $t \longrightarrow \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, x]$ donc f' est intégrable sur $]0, x]$.

$\lim\limits_{0} f = 0$ par hypothèse donc

$$\forall x > 0 \quad |f(x)| = \left| f(x) - \lim_{0} f \right| = \left| \int_0^x f'(t)\,dt \right|$$

$$|f(x)| \leq \int_0^x |f'(t)|\,dt \leq c\int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}\,dt$$

par q6 $\phi(x) \geq 0 \implies \int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}\,dt \leq \frac{4\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}$

or $c > 0$ donc

$$|f(x)| \leq \frac{4c\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}$$

alors $0 \leq f^2(x) \leq 16c^2 \frac{x e^x}{(1+x)^2}$

$$0 \leq f^2(x)\,\frac{e^{-x}}{x} \leq \frac{16C^2}{(1+x)^2}$$

$x \mapsto \dfrac{16C^2}{(1+x)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$

et $\dfrac{16C^2}{(1+x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{16C^2}{x^2}$

donc $x \longmapsto \dfrac{16C^2}{(1+x)^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

Par comparaison $x \longmapsto f^2(x)\,\dfrac{e^{-x}}{x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On avait aussi f continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ (elle est C^1)

donc $f \in E$.

III q15 : Par inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall x>0$, $f \in E$: $0 \leq |U(f)(x)| = |\langle k_x | f \rangle| \leq \|k_x\| \cdot \|f\|$

par q.12 $\lim\limits_{x\to 0} \|k_x\| = 0$ donc par encadrement

$\lim\limits_{x\to 0^+} |U(f)(x)| = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} U(f)(x) = 0$

q16 Relation de Chasles avec

$$k_x(t)\,e^{-t} = \begin{cases} (e^t-1)e^{-t} = (1-e^{-t}) & \text{si } 0<t\leq x \\ (e^x-1)e^{-t} & \text{si } t \geq x \end{cases}$$

Pour $x>0$

Q17 $t \mapsto \frac{(1-e^{-t})f(t)}{t}$ est continue sur $]0,x]$

et intégrable en 0, notons F une primitive

$$\int_0^x \frac{(1-e^{-t})f(t)}{t}\,dt = F(x) - \lim_0 F$$

$t \mapsto \frac{f(t)e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$

et intégrable en $+\infty$, notons G une de ses primitives, $\int_x^{+\infty} \frac{f(t)e^{-t}}{t}\,dt = \lim_{+\infty} G - G(x)$

Par produit et somme de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$, $U(f)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$U(f)(x) = F(x) - \lim_0 F + (e^x-1)\left(\lim_{+\infty} G - G(x)\right)$$

Donc
$$(U(f))'(x) = F'(x) + e^x\left(\lim_{+\infty} G - G(x)\right) - (e^x-1)\,G'(x)$$

$$= \frac{(1-e^{-x})f(x)}{x} + e^x\int_x^{+\infty}\frac{f(t)e^{-t}}{t}\,dt - (e^x-1)\frac{f(x)e^{-x}}{x}$$

$$(U(f))'(x) = e^x\int_x^{+\infty}\frac{f(t)e^{-t}}{t}\,dt$$

9.18 $\forall x>0$

$$U(f)'(x) = e^x \left(\lim_{+\infty} G - G(x) \right)$$

$U(f)'$ est donc C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$U(f)''(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{f(t)e^{-t}}{t} dt - e^x G'(x)$$

$$U(f)''(x) = U(f)'(x) - e^x \frac{f(x)e^{-x}}{x}$$

$$U(f)''(x) = U(f)'(x) - \frac{f(x)}{x}$$

$U(f)$ vérifie l'équation différentielle

$$y'' - y' = -\frac{f(x)}{x} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}$$

9.19

$$|U(f)'(x)| \leq e^x \int_x^{+\infty} \frac{|f(t)|e^{-t}}{t} dt$$

$$\leq e^x \int_x^{+\infty} \left| \frac{f(t)e^{-t/2}}{\sqrt{t}} \right| \times \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}} dt$$

Comme fait en q9 ~~et~~ à q11, on peut montrer que $(f,g) \longmapsto \int_x^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $[x, +\infty[$ alors par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|U(f)'(x)| \leq e^x \left(\int_x^{+\infty} \frac{f^2(r)e^{-t}}{t} dr\right)^{1/2} \times \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dr\right)^{1/2}$$

or $\displaystyle\int_x^{+\infty} f^2(r)\frac{e^{-t}}{t} dr \leq \int_0^{+\infty} \frac{f^2(r)e^{-r}}{t} dr$ par positivité de $t \mapsto \dfrac{f^2(r)e^{-r}}{t}$

donc

$$|U(f)'(x)| \leq e^x \|f\| \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dr\right)^{1/2}$$

on a déjà vu en q. 12 que

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-r}}{t} dr \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dr = \frac{e^{-x}}{x}$$

donc $\displaystyle 0 \leq \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dr\right)^{1/2} \leq \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}}$

et

$$|U(f)'(x)| \leq e^x \|f\| \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}}$$

$$|U(f)'(x)| \leq \|f\| \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}$$

q. 20 : $U(f)$ vérifie les hypothèses de IB

donc $U(f) \in E$ si $f \in E$

Par linéarité de l'intégrale, U est linéaire

Donc $U \in \mathcal{L}(E)$ et comme vu en q7 ici avec $C = \|f\|$, on obtient

$$|U(f)(x)| \leq 4\|f\| \frac{\sqrt{x}\, e^{x/2}}{1+x}$$

q.21 : par ce qui précède

$$0 \leq (U(f)(x))^2 \leq 16\|f\|^2 \frac{x e^x}{(1+x)^2}$$

$$0 \leq \frac{(U(f)(x))^2 e^{-x}}{x} \leq \frac{16\|f\|^2}{(1+x)^2}$$

$$0 \leq \|U(f)\|^2 \leq 16\|f\|^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

$$\leq 16\|f\|^2 \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^{\infty}$$

$$\|U(f)\|^2 \leq 16\|f\|^2$$

donc $\|U(f)\| \leq 4\|f\|$

q.22 : Soit $f \in E$ si $U(f) = 0$ alors $U(f)' = 0$ et $U(f)'' = 0$ or $U(f)'' - U(f)' = -\frac{f(x)}{x}$ donc $\forall x > 0 \quad f(x) = 0$

on a donc $f \in \ker(U) \Leftrightarrow f = 0$

U est un endomorphisme injectif.

q.23 : Supposons U surjectif alors

$\forall g \in E \ \exists f \in E$ tq $g = U(f)$

et par q 20

$$|g(x)| = |U(f)(x)| \leq 4 \|f\| \frac{\sqrt{x}\, e^{x/2}}{1+x}$$

prenons $g = P_\alpha$ ~~avec~~ avec $\alpha > 0$, il existe $f \in E$ tq

$\forall x > 0 \qquad x^\alpha \leq 4\|f\| \frac{\sqrt{x}\, e^{x/2}}{1+x}$

$$1 \leq 4\|f\| \frac{x^{1/2-\alpha}\, e^{x/2}}{1+x} \quad (*)$$

on prend α tq $\frac{1}{2} - \alpha > 0$ donc $0 < \alpha < 1/2$

alors $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^{1/2-\alpha}\, e^{x/2}}{1+x} = 0$

ce qui donne $1 \leq 0$ par $(*)$

ce qui est absurde.

U n'est pas surjectif.