13 - $2\, d_{VT}(P_{X_n}, \Pi_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P_n(X_n = k) - e^{-1} \frac{1^k}{k!} \right|$

$X_n(S_n) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$

donc

$$2\, d_{VT}(P_{X_n}, \Pi_1) = \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} - \frac{e^{-1}}{k!} \right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} - \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left| - \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

---

14 - $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+j)!}$

$\forall j \in \mathbb{N}^*$ $(n+1+j)! = (n+1)!\,(n+2)\cdots(n+1+j)$

$$= (n+1)! \prod_{i=0}^{j-1} (n+2+i)$$

$\forall i \in [\![0, j-1]\!]$ $n+2+i \geq n+2 > 0$

donc $(n+1+j)! \geq (n+1)! \prod_{i=0}^{j-1} (n+2)$

$\forall j \geq 1 \quad (n+1+j)! \geq (n+1)!\,(n+2)^j > 0$

donc $$\frac{1}{(n+1+j)!} \leq \frac{1}{(n+1)!\,(n+2)^j}$$

Cette inégalité est encore vraie pour $j=0$

$\frac{1}{n+2} \in]-1,1[$ donc la série $\sum_j \frac{1}{(n+2)^j}$ converge et donc par somme et passage à la limite

$$r_n \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!\,(n+2)^j}$$

$$r_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k}$$

on a aussi $r_n \geq \frac{1}{(n+1)!}$ car $\forall k \geq n+2 \ \frac{1}{k!} \geq 0$

donc $$1 \leq (n+1)!\, r_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)^k$$

$$1 \leq (n+1)!\, r_n \leq \frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} (n+1)!\, r_n = 1$ et $\boxed{r_n \sim \frac{1}{(n+1)!}}$

15 —

$$2\, d_{VT}(P_{X_n}, \Pi_1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| \leq \frac{1}{(n-k+1)!}$$ par CSSA

car $\left(\frac{1}{i!}\right) \downarrow 0$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} \times \frac{1}{(n-k+1)!} \right) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}$$

$$\leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$2 d_{VT}(P_{X_n}, \Pi_1) \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + e^{-1} r_n$$

$$0 \leq d_{VT}(P_{X_n}, \Pi_1) \leq \frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{e^{-1}}{2} r_n$$

$$r_n \sim \frac{1}{(n+1)!}$$

donc $r_n = O\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)$

donc $d_{VT}(P_{X_n}, \Pi_1) = O\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)$