1 Nombre de points fixes d'une permutation.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'intervalle entier $[\![1,n]\!] = \{1,2,\cdots,n\}$, c'est-à-dire des bijections de $[\![1,n]\!]$ vers lui-même.

Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est une permutation, on appelle **point fixe** de σ tout entier $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i) = i$

Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est appelée un **dérangement** si elle n'a aucun point fixe.
Pour tout $n \geq 1$, on note d_n le nombre de dérangements de l'intervalle entier $[\![1,n]\!]$. Par convention, on pose $d_0 = 1$.

On munit l'ensemble fini $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme notée P_n. Sur l'espace probabilisé fini $(\mathcal{S}_n, P_n)$, on définit la variable aléatoire X_n telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $X_n(\sigma)$ est le nombre de points fixes de la permutation σ.
On introduit enfin la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!}x^n$, dont le rayon de convergence est noté R, et dont la somme sur l'intervalle de convergence $]-R,R[$ est notée s :

$$\forall x \in]-R,R[\quad s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n$$

1 ▷ Rappeler le cardinal de $\mathcal{S}_n$. En déduire que $R \geq 1$.

2 ▷ Pour $k \in [\![0,n]\!]$, montrer que le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement k points fixes est $\binom{n}{k} d_{n-k}$.

En déduire que $P_n(X_n = k) = \dfrac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}$.

3 ▷ Montrer que

$$\forall x \in]-1,1[\quad s(x)e^x = \frac{1}{1-x}.$$

En déduire que $R = 1$.

4 ▷ En partant de la relation $(1-x)s(x) = e^{-x}$ pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\dfrac{d_n}{n!}$ pour n entier naturel, sous la forme d'une somme.

5 ▷ Montrer que la loi de la variable aléatoire X_n est donnée par

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

6 ▷ Sur l'espace probabilisé fini $(\mathcal{S}_n, P_n)$, on définit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire U_i telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on ait $U_i(\sigma) = 1$ si $\sigma(i) = i$, et $U_i(\sigma) = 0$ sinon.

Montrer que U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$.

Montrer que, si $i \neq j$, la variable U_iU_j suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

7 ▷ Exprimer X_n à l'aide des U_i, $1 \leq i \leq n$. En déduire l'espérance $\mathrm{E}(X_n)$ et la variance $\mathrm{V}(X_n)$.

8 ▷ Dans cette question, on fixe un entier naturel k. Déterminer

$$y_k = \lim_{n\to+\infty} P_n(X_n = k)$$

Soit Y une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad P(Y = k) = y_k.$$

Reconnaître la loi de Y.

9 ▷ On note G_{X_n} et G_Y les fonctions génératrices respectives des variables X_n et Y de la question précédente. Exprimer $G_{X_n}(s)$ sous forme de somme, pour s réel, et vérifier que

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(s) = G_Y(s).$$

2 Convergence en variation totale

Dans la suite du problème, on appelle **distribution (de probabilités)** sur $\mathbb{N}$ toute application $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x(k) = 1$$

On note $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}$ l'ensemble des distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$.
Si x et y sont deux distributions sur $\mathbb{N}$, on définit la **distance en variation totale** entre x et y par

$$d_{VT}(x, y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - y(k)|$$

10 ▷ Soient x, y, z trois distributions sur $\mathbf{N}$. Prouver les propriétés :

$$0 \leq d_{VT}(x, y) \leq 1$$
$$d_{VT}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$$
$$d_{VT}(y, x) = d_{VT}(x, y);$$
$$d_{VT}(x, z) \leq d_{VT}(x, y) + d_{VT}(y, z).$$

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on note p_X la distribution de probabilités de X. Ainsi, p_X est l'application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad p_X(k) = P(X = k).$$

Il est clair que $p_X \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}$.
En particulier, si λ est un réel strictement positif, on appelle **distribution de Poisson de paramètre** λ l'application $\pi_\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \pi_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

11 ▷ Soient X et Y deux variables de Bernoulli, ayant respectivement pour paramètres $\lambda \in]0,1[$ et $\mu \in]0,1[$. Calculer $d_{VT}(p_X, p_Y)$.

12 ▷ Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $\lambda \in]0,1[$. Montrer que

$$d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = \lambda\left(1 - e^{-\lambda}\right)$$

En déduire que

$$d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) \leq \lambda^2$$

On considère de nouveau les variables aléatoires X_n introduites dans la partie 1. Les questions **8**. et **9**. semblent montrer une certaine "convergence" des lois des variables X_n vers la loi de Poisson de paramètre 1. Le but de la fin de cette partie est de montrer que

$$d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et que cette convergence est assez rapide.

13 ▷ Vérifier la relation, pour tout n entier naturel non nul,

$$2 d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

14 ▷ Pour n entier naturel, on pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Prouver la majoration

$$r_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k}$$

En déduire un équivalent simple de r_n lorsque n tend vers $+\infty$.

15 ▷ En continuant de majorer le second membre de l'égalité de la question **13.**, établir l'estimation

$$d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)$$

On pourra faire intervenir des coefficients binomiaux.