Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note $\mathbf{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathbf{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

Partie I – Quelques propriétés des fonctions f_α

Q1. Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α.

Q2. Déterminer, suivant les valeurs du réel α, le domaine de définition $\mathbf{D}_\alpha$ de la fonction f_α. *On distinguera les cas* $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0, 1]$ *et* $\alpha \in]1, +\infty[$.

Q3. On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathbf{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.

Q4. Expliciter f_0, f_{-1} et f_1.

Q5. Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathbf{D}_\alpha$.

Q6. Soit $\alpha \leq 1$. Prouver que $\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. *On pourra comparer* f_α *à* f_1.

On suppose dans les deux prochaines questions qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ et une variable aléatoire X_α, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, tels que la fonction génératrice G_α de X_α soit :

$$G_\alpha = \lambda f_\alpha.$$

Q7. Montrer que $\alpha > 1$ et $\lambda = \dfrac{1}{f_\alpha(1)}$.

Q8. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X_α admette une espérance.
Déterminer cette espérance en fonction de $f_\alpha(1)$ et $f_{\alpha-1}(1)$ seulement.

Partie II – Un logarithme complexe

Q9. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1, 1[$ associe $\ln(1 + x)$.

Pour tout nombre complexe z, tel que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note :

$$S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$$

Q10. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S. Pour tout x réel élément de $]-R, R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathcal{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{z_0^n}{n}t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.
On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

Q11. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

Q12. Prouver que g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t)$.

Q13. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0}h(t).$$

Q14. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$