

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note $\mathbb{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathbb{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

Partie I – Quelques propriétés des fonctions f_α

- 1) Pour $n \neq 0$, on pose $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, alors $a_n \neq 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 = L$$

Par la règle de d'Alembert pour les séries entières, on sait que le rayon de convergence R de

$$\sum a_n x^n \text{ est égal à } \frac{1}{L} : \boxed{R=1}$$

- 2) On note $\mathbb{D}_\alpha$ le domaine de définition de la fonction f_α .

Cours : Pour une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R , si $|x| > R$ alors $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement, si $|x| < R$ alors $\sum a_n x^n$ converge absolument.

D'après le rayon de convergence R trouvé précédemment on sait que $] -1, 1[\subset \mathbb{D}_\alpha \subset [-1, 1]$.

• Si $\alpha \leq 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ et donc les séries $\sum a_n$ et $\sum (-1)^n a_n$ divergent grossièrement, par conséquent $] -1, 1[= \mathbb{D}_\alpha$.

• Si $\alpha \in]0, 1]$ alors la suite (a_n) est décroissante et converge vers 0 donc la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge, mais par les séries de Riemann la série $\sum a_n$ diverge. On en déduit que $\mathbb{D}_\alpha = [-1, 1[$.

• Si $\alpha > 1$, alors par les séries de Riemann les séries $\sum (-1)^n a_n$ et $\sum a_n$ convergent absolument et donc $\mathbb{D}_\alpha = [-1, 1]$.

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{D}_\alpha =] -1, 1[& \text{si } \alpha \leq 0 \\ \mathbb{D}_\alpha = [-1, 1[& \text{si } \alpha \in]0, 1] \\ \mathbb{D}_\alpha = [-1, 1] & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}}$$

- 3) On suppose dans cette question $\alpha > 0$.

On a donc $] -1, 1[\subset \mathbb{D}_\alpha \subset [-1, 1]$.

On note $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

- Si $x \in \mathbb{D}_\alpha \cap \mathbb{R}^+$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n x^\alpha \geq 0$ et donc $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \geq 0$.
- Si $x \in \mathbb{D}_\alpha \cap]-\infty, 0[$, alors on peut écrire $x = -|x|$ et la série $\sum a_n x^n$ est la série alternée $\sum (-1)^n a_n |x|^n$. Puisque la suite positive $(a_n |x|^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite nulle, par le critère spécial des séries alternées, on sait que $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est du signe de son premier terme $a_1 x = x < 0$.

(Par le critère spécial des séries alternées, on a $-a_1|x| \leq f(x) \leq a_2x^2 - a_1|x| \leq 0$)

$x \geq 0 \implies f_\alpha(x) \geq 0$
Pour tout $x \in \mathbb{D}_\alpha$,
$x < 0 \implies f_\alpha(x) \leq 0$

4) D'après les séries entières usuelles, on sait que

$f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$	pour $x \in]-1, 1[$
$f_{-1}(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$	pour $x \in]-1, 1[$.
$f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$	pour $x \in [-1, 1[$

5) Soit $\alpha > 1$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{D}_\alpha = [-1, 1]$.
- $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n^\alpha}$, alors par les séries de Riemann la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge et donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $\mathbb{D}_\alpha = [-1, 1]$ et donc aussi uniformément.

Par théorème de continuité la fonction $f_\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{D}_\alpha$.

6) Soit $\alpha \leq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < n^\alpha \leq n$ donc

$$\forall x \in]0, 1[\quad \frac{x^n}{n} \leq \frac{x^n}{n^\alpha}$$

et par somme pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et limite quand $N \rightarrow +\infty$ on obtient :

$$\forall x \in]0, 1[\quad f_1(x) \geq f_\alpha(x)$$

ce qui donne $\forall x \in]0, 1[\quad f_\alpha(x) \geq -\ln(1-x)$, or $\lim_{x \rightarrow 1^-} -\ln(1-x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$.

On suppose dans les deux prochaines questions qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ et une variable aléatoire X_α , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, tels que la fonction génératrice G_α de X_α soit :

$$G_\alpha = \lambda f_\alpha.$$

- 7) On sait que la fonction génératrice de X_α , $G_\alpha = \lambda \cdot f_\alpha$, est définie au moins sur $[-1, 1]$ et vaut 1 en 1.

On doit donc avoir $\lambda \neq 0$ et f_α définie au moins sur $[-1, 1]$ avec $1 = \lambda \cdot f_\alpha(1)$. En utilisant la

question 2, on a : $\alpha > 1$ et $\lambda = \frac{1}{f_\alpha(1)}$.

8) 1^{ière} méthode : avec la définition de l'espérance

X_α est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc X_α est d'espérance finie **SSI** la famille $(nP(X_\alpha = n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable, ce qui revient à la convergence absolue de $\sum nP(X_\alpha = n)$.

On a par définition $\forall x \in [-1, 1] \quad G_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_\alpha = n)x^n = \lambda \cdot f_\alpha(x) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$

Par unicité du développement en série entière de G_α , on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(X_\alpha = n) = \frac{\lambda}{n^\alpha}$ et donc $nP(X_\alpha = n) = \frac{\lambda}{n^{\alpha-1}}$.

Par les séries de Riemann, on sait que $\sum nP(X_\alpha = n)$ converge absolument **SSI** $\alpha - 1 > 1$.

On a donc X_α est d'espérance finie **SSI** $\alpha > 2$.

Et dans ce cas $E(X_\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X_\alpha = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{n^{\alpha-1}} = \lambda f_{\alpha-1}(1)$, donc $E(X_\alpha) = \frac{f_{\alpha-1}(1)}{f_\alpha(1)}$.

2^{ième} méthode : avec le lien entre fonction génératrice et espérance

On sait que la variable aléatoire X_α est d'espérance finie si et seulement si sa fonction génératrice G_α est dérivable en 1 et alors $\mathbb{E}(X_\alpha) = G'_\alpha(1)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^\alpha}$ est de classe C^1 sur $[-1, 1]$ avec $f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n^{\alpha-1}}$.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[-1, 1]$ et est de somme f_α .

• $\|f'_n\|_{\infty}^{[-1,1]} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$. On en déduit que si $\alpha > 2$ alors la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$ et donc uniformément. On sait alors que f_α est de classe C^1 sur $[-1, 1]$ avec $\forall x \in [-1, 1]$

$$f'_\alpha(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^{\alpha-1}}.$$

• Pour $1 < \alpha \leq 2$, la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset [0, 1[$ par convergence normale puisque $\left(\sup_{x \in [a, b]} |f'_n(x)| = \frac{b^{n-1}}{n^{\alpha-1}} \right)$, donc $G_\alpha = \lambda \cdot f_\alpha$ est continue sur $[-1, 1]$, de classe C^1 sur $[0, 1[$ avec $\forall x \in]0, 1[\quad G'_\alpha(x) = \frac{\lambda}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^{\alpha-1}} = \frac{\lambda}{x} \cdot f_{\alpha-1}(x)$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_{\alpha-1}(x) = +\infty$ (question 6), G_α n'est pas dérivable en 1.

On en déduit que X_α est d'espérance finie **SSI** $\alpha > 2$ et dans ce cas

$$\mathbb{E}(X_\alpha) = G'_\alpha(1) = \lambda \cdot f_{\alpha-1}(1). \quad \mathbb{E}(X_\alpha) = \frac{f_{\alpha-1}(1)}{f_\alpha(1)}.$$

Partie II – Un logarithme complexe

9) On sait que $\forall x \in]-1, 1[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$

Pour tout nombre complexe z , tel que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note :

$$S(z) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$$

10) On pose $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. On sait que le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est égal à 1.

On sait aussi que le rayon de convergence R de la série entière définissant S est le même que

celui de la série entière $\sum_{n \geq 1} n b_n z^n$ alors $R = 1.$

On pouvait aussi utiliser le critère de d'Alembert

Pour tout x réel élément de $] -1, 1[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$, donc $\exp(S(x)) = 1+x.$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.

On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0).$

11) • Si $z_0 = 0$ alors la série définissant g est de rayon égal à $+\infty$ et $g(t) = 0$ pour tout réel t .

• Si $z_0 \neq 0$, d'après le rayon de convergence $R = 1$ de la série entière définissant S , on sait que si $|t| < \frac{1}{|z_0|}$ alors $|tz_0| < R$ et la série définissant g converge absolument et pour $|t| > \frac{1}{|z_0|}$ alors $|tz_0| > R$ et la série définissant g diverge grossièrement. On en déduit que le rayon de

convergence de la série entière définissant g est

$$R' = \frac{1}{|z_0|}.$$

Là aussi on peut utiliser la règle de d'Alembert lorsque $z_0 \neq 0$ en posant $c_n = (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n}$.

Pour plus de facilité, on va écrire $R' = \frac{1}{|z_0|}$ même lorsque $z_0 = 0$.

12) Puisque $|z_0| < 1$, on a $R' = \frac{1}{|z_0|} > 1$ et donc $[0, 1] \subset]-R', R'[$. g étant définie et de classe C^∞

au moins sur $] -R', R'[$, on a :

g est définie et de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

On sait aussi que

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1] \quad g'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} n t^{n-1} \\ &= z_0 \sum_{n=1}^{+\infty} (-z_0 t)^{n-1} \\ &= z_0 \sum_{k=0}^{+\infty} (-z_0 t)^k \\ &= \frac{z_0}{1 + z_0 t} \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall t \in [0, 1] \quad g'(t) = \frac{z_0}{1 + z_0 t}$$

13) On pose $h = \exp \circ g$. h est de classe C^∞ sur $[0, 1]$ par composée et

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1] \quad h'(t) &= g'(t) \cdot \exp(g(t)) \\ &= \frac{z_0}{1 + z_0 t} h(t) \end{aligned}$$

On a bien :

$$\forall t \in [0, 1] \quad h'(t) = \frac{z_0}{1 + z_0 t} h(t)$$

14) L'équation différentielle de la question précédente est une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène de la forme $y' + a(t)y = 0$ avec $a(t) = -\frac{z_0}{1 + z_0 t}$, a étant une fonction continue sur $[0, 1]$.

On sait alors que $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est un espace vectoriel de dimension égale à 1.

L'équation $y' + a(t)y = 0$ est équivalente à $(1 + z_0 t)y' - z_0 y = 0$, on remarque alors que la fonction $y : t \mapsto 1 + tz_0$ vérifie cette équation différentielle et elle est non identiquement nulle alors

$\mathcal{S} = Vect(t \mapsto 1 + z_0 t)$ et les solutions de $y' + \frac{z_0}{1 + tz_0}y = 0$ sont $t \mapsto \alpha(1 + tz_0)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

On sait que la fonction $h = \exp \circ g$ vérifie l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [0, 1] \quad h(t) = \alpha(1 + tz_0)$.

$h(0) = \exp(g(0))$ avec $g(0) = 0$, donc $\alpha = 1$.

On a obtenu $\forall t \in [0, 1] \quad \exp(S(tz_0)) = 1 + tz_0$ et en particulier pour $t = 1$ on obtient

$$\exp(S(z_0)) = 1 + z_0.$$