1 Exemples d'endomorphismes cycliques

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \text{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ soit une base de l'espace vectoriel E .

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Par exemple, on a $\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$

Q1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer $\Delta(X^k)$ sous une forme développée.

Q3. En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

Q4. Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.

Comme l'endomorphisme h est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de l'espace vectoriel E composée de vecteurs propres de h . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k .

Soit $v \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E , il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Q5. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

Q6. Montrer que le déterminant de la famille $\mathcal{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$ dans la base $\mathcal{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Q7. Conclure que h est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes.

2 Projection orthogonale

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel euclidien des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni du produit scalaire canonique défini pour A et B matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par : $\langle A|B \rangle = \text{trace}(A^T.B)$.

- Q8.** Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que vaut le réel $\langle A|B \rangle$?
- Q9.** On note $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel formés des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner pour le produit scalaire canonique une base orthonormée de $\mathcal{T}$ et de son orthogonal $\mathcal{T}^\perp$.
- Q10.** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer le projeté orthogonal de la matrice A sur $\mathcal{T}$, ainsi que la distance de la matrice A à $\mathcal{T}$.