

On admet la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$  avec  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

On étudie la fonction  $S$  d'expression :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}.$$

**Q1.** On suppose que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite réelle positive décroissante de limite nulle et que  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée. En admettant l'identité suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0.$$

démontrer que la série  $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$  converge.

**Q2.** Soient  $x \in ]0, 2\pi[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \exp\left(\frac{i(n+1)x}{2}\right)$$

**Q3.** À l'aide des deux questions précédentes, démontrer que  $S$  est définie sur  $]0, 2\pi[$ .

**Q4.** On admet dans cette question que si  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in ]0, 2\pi[$  :

$$\left| \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}$$

Démontrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x \in ]0, 2\pi[$  :

$$\left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq C$$

**Q5.** Déterminer la limite, quand  $x$  tend vers  $0^+$ , de :

$$I(x) = \sqrt{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$$

**Q6.** Déterminer la limite en  $0^+$  de la fonction  $x \mapsto \frac{e^{ix} - 1}{ix}$ . Donner alors un équivalent de  $S(x)$  quand  $x$  tend vers  $0^+$ .