

# 1 Extrait de CCINP PC 2023

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . On rappelle que pour tout entier  $p \in \mathbb{N}^*$ , on note :

$$f^0 = \text{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme  $f$  est cyclique s'il existe un vecteur  $v \in E$  tel que la famille  $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$  soit une base de l'espace vectoriel  $E$ .

## Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et on considère l'application  $\Delta$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Par exemple, on a  $\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$

**Q1.** Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\Delta(P)$  est un polynôme par différence de deux polynômes avec  $\deg(\Delta(P)) \leq \max(\deg(P(X+1)), \deg(P(X)))$ , or  $\deg(P(X+1)) = \deg(P(X)) \leq n$  donc  $\deg(\Delta(P)) \leq n$  et  $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ .

On montre que  $\Delta(\lambda P + Q) = \lambda \Delta(P) + \Delta(Q)$  pour  $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ .  
 $\Delta$  est donc un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Q2.** Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

$$\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \left( \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i \right) - X^k$$

$$\text{On a donc } \Delta(1) = 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \Delta(X^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i.$$

**Q3.** D'après ce qui précède,  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \deg(\Delta(X^k)) = k - 1$ .

Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  un polynôme non constant, alors il existe  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et des réels  $a_0, \dots, a_p$  avec  $a_p \neq 0$  tels que  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ . Par linéarité de  $\Delta$  on a  $\Delta(P) = a_p \Delta(X^p) + \sum_{k=0}^{p-1} a_k \Delta(X^k)$ .

D'après la remarque faite sur le degré de chaque polynôme  $\Delta(X^k)$ , on obtient  $\deg(\Delta(P)) = \deg(\Delta(X^p)) = p - 1 = \deg(P) - 1$ .

**Q4.** D'après le résultat précédent, on montre par récurrence finie que  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \deg(\Delta^k(X^n)) = n - k$ , alors la famille  $(X^n, \Delta(X^n), \dots, \Delta^n(X^n))$  est une famille de  $\mathbb{R}_n[X]$  de polynômes non nuls échelonnée en degré, c'est donc une famille libre et comme elle contient  $n + 1$  éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$  et que  $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$ , c'est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .  
 $\Delta$  est donc cyclique.

## Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable  $h$  d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de  $h$  pour que cet endomorphisme soit cyclique.

Comme l'endomorphisme  $h$  est diagonalisable, il existe une base  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  de l'espace vectoriel  $E$  composée de vecteurs propres de  $h$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  la valeur propre associée au vecteur propre  $v_k$ .

Soit  $v \in E$ . Comme  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$  tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

**Q5.** Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on montre par récurrence (à faire) que  $\forall i \in \mathbb{N}^* \quad h^i(v_k) = \lambda_k^i v_k$ , alors par linéarité de  $h$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

**Q6.** En utilisant le résultat de la question précédente le déterminant de la famille  $\mathcal{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$  dans la base  $\mathcal{B}$  est égal à :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2 \lambda_2 & \dots & \alpha_2 \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n \lambda_n & \dots & \alpha_n \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  la ligne  $i$  se factorise par  $\alpha_i$  donc

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

on reconnaît un déterminant de Vandermonde donc

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \dots \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

**Q7.** D'après ce qui précède si les  $n$  valeurs propres sont distinctes alors en prenant  $v = \sum_{k=1}^n v_k$ , on

a  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$  et donc la famille  $\mathcal{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$  est une base de  $E$  et  $h$  est cyclique.

Si  $h$  est cyclique alors il existe un vecteur  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$  tel que  $\mathcal{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$

soit une base et donc  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \prod_{i=1}^n \alpha_i \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$ , ce qui entraîne que

$$\forall i \neq j \quad \lambda_i \neq \lambda_j.$$

On a bien  $h$  est cyclique si et seulement si il admet  $n$  valeurs propres distinctes.

## 2 Extrait de CCINP MP 2015

On considère  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel euclidien des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni du produit scalaire canonique défini pour  $A$  et  $B$  matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par :  $\langle A|B \rangle = \text{trace}(A^T.B)$ .

**Q8.** Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$  sont deux matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $A^T.B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + cc' & ab' + cd' \\ ba' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$  donc  $\langle A|B \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$ .

**Q9.** On note  $\mathcal{T}$  le sous-espace vectoriel formés des matrices triangulaires supérieures de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . D'après l'égalité précédente on a immédiatement  $\forall (i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket^4$ ,  $(i, j) \neq (k, \ell) \implies \langle E_{ij}|E_{k\ell} \rangle = 0$  et  $\langle E_{ii}|E_{ii} \rangle = 1$ .

On en déduit que  $(E_{11}, E_{12}, E_{22})$ , qui est une base de  $\mathcal{T}$ , est orthonormée. Et puisque  $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $(E_{21})$  est une base orthonormée de  $\mathcal{T}^\perp$ .

**Q10.** Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , puisque  $(E_{11}, E_{12}, E_{22})$  est une base orthonormée de  $\mathcal{T}$  on sait que le projeté orthogonal de la matrice  $A$  sur  $\mathcal{T}$  est

$$p(A) = \langle A|E_{11} \rangle E_{11} + \langle A|E_{12} \rangle E_{12} + \langle A|E_{22} \rangle E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ainsi la distance de la matrice  $A$  à  $\mathcal{T}$  est :

$$d(A, \mathcal{T}) = \|A - p(A)\| = \|3E_{21}\| = |3|\|E_{21}\| = 3$$

## 3 Extrait de CCINP PC 2024

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la fonction  $u_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad u_n(x) = x \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right)$$

**Q1.** Par développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $\ln(1 + u)$ , on a :

$$\forall x > 0 \quad u_n(x) = x \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc  $\forall x > 0 \quad u_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et par comparaison la série  $\sum u_n(x)$  converge absolument puisque la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge.

La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge donc simplement sur  $]0, +\infty[$ .

Dans tout le reste de cet exercice, on note  $\varphi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

**Q2.**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de fonctions de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  puisque  $x \mapsto 1 + \frac{x}{n}$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  à valeurs dans  $]1, +\infty[$  et la fonction  $\ln$  est de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$ .

Par opérations sur les fonctions dérivables on a :

$$\begin{aligned} u'_n(x) &= \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{1/n}{1 + x/n} \\ &= \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+x} \\ \forall x > 0 \\ &= \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{x}{n(n+x)} - \frac{1-x/n}{n+x} \\ u'_n(x) &= \frac{x}{n(n+x)} + \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Posons  $\varepsilon_n = \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n}$ , en utilisant encore le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $\ln(1+u)$ , on a  $|\varepsilon_n| \sim \frac{1}{2n^2}$  et donc  $u'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n$  avec  $\sum \varepsilon_n$  qui converge absolument.

**Q3.** Soit  $[a, b]$  un segment inclus dans  $]0, +\infty[$ , d'après ce qui précède on a :

$$\forall x \in [a, b] \quad |u'_n(x)| \leq |\varepsilon_n| + \frac{x}{n(n+x)} \leq |\varepsilon_n| + \frac{b}{n^2}$$

On a donc  $0 \leq \|u'_n\|_{\infty}^{[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |u'_n(x)| \leq |\varepsilon_n| + \frac{b}{n^2}$ .

Les séries  $\sum |\varepsilon_n|$  et  $\sum \frac{1}{n^2}$  convergent alors par combinaison linéaire la série  $\sum \left( |\varepsilon_n| + \frac{b}{n^2} \right)$  converge et par comparaison la série  $\sum \|u'_n\|_{\infty}^{[a,b]}$  est convergente et la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u'_n$  converge normalement sur tout segment  $[a, b]$  inclus dans  $]0, +\infty[$ .

**Q4.** (i) La fonction  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  vérifie le théorème de la classe  $C^1$  sur les séries de fonctions par les questions 1-2-3, donc la fonction  $\varphi : x \mapsto -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

(ii) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on a  $(x+1) \in ]0, +\infty[$  et

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n(x+1) - u_n(x))$$

Or

$$\begin{aligned} u_n(x+1) - u_n(x) &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n+x) - \ln(n+1+x) \\ &= \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$u_n(x+1) - u_n(x) = v_n(x) - v_{n+1}(x) \text{ avec } v_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Alors par somme d'une série télescopique on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_n(x) - v_{n+1}(x)) = v_1(x) - 0 = \ln(1+x)$$

et finalement  $\varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x)$ .

(iii) Par application du théorème de la classe  $C^1$  à la série de fonctions  $\sum u_n$  et par la question 2, on sait que

$$\forall x > 0 \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g_n : x \mapsto \frac{x}{n(n+x)}$  est de classe  $C^1$  avec  $\forall x > 0 \quad g'_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{nx-x}{(n+x)^2}$ , donc  $g'_n(x) = \frac{x}{(n+x)^2} > 0$  et  $g_n$  est croissante sur  $]0, +\infty[$ . On en déduit que  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$  est croissante sur  $]0, +\infty[$ .

De plus  $x \mapsto \frac{-1}{x}$  est croissante et  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n$  est constante.

Par somme de fonctions croissantes,  $\varphi'$  est croissante sur  $]0, +\infty[$ .

(iv) On remarque que  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n(1) = 0$ , on a aussi  $\ln(1) = 0$  donc la fonction  $\varphi$  s'annule en 1.

La fonction  $\varphi$  vérifie donc les conditions :

(i) la fonction  $\varphi$  est de classe  $C^1$ ,

(ii) pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on a  $\varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x)$ ,

(iii) la fonction  $\varphi'$  est croissante,

(iv) la fonction  $\varphi$  s'annule en 1, c'est-à-dire  $\varphi(1) = 0$ .

## 4 Extrait de CCINP MP 2022

On admet la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$  avec  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

On étudie la fonction  $S$  d'expression :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}.$$

**Q1.** On suppose que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite réelle positive décroissante de limite nulle et que  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée. En admettant l'identité suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0.$$

Puisque la suite  $(a_n)$  est décroissante on a  $(a_n - a_{n+1}) \geq 0$  et puisque la suite  $(b_n)$  est bornée, il existe  $M > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq |(a_n - a_{n+1}) b_n| \leq M(a_n - a_{n+1})$ .

La suite  $(a_n)$  converge (elle est de limite nulle), donc la série télescopique  $\sum (a_n - a_{n+1})$  converge. Par comparaison la série  $\sum (a_n - a_{n+1}) b_n$  converge absolument, donc la suite de ses

sommes partielles  $\left( \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$  converge.

La suite  $(b_n)$  est bornée et la suite  $(a_n)$  converge vers 0, alors la suite  $(a_{N+1} b_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$  converge.

On déduit de l'égalité (\*) que la suite des sommes partielles de la série  $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$  converge.

La série  $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$  est bien convergente.

**Q2.** Soient  $x \in ]0, 2\pi[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad e^{ikx} = (e^{ix})^k$  avec  $e^{ix} \neq 1$ , donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ikx} &= e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= e^{ix} \left( \frac{e^{inx/2}}{e^{ix/2}} \right) \left( \frac{2i \sin(nx/2)}{2i \sin(x/2)} \right) \\ \sum_{k=1}^n e^{ikx} &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \exp\left(\frac{i(n+1)x}{2}\right) \end{aligned}$$

**Q3.** Pour  $x \in ]0, 2\pi[$ , on peut écrire  $e^{inx} = b_n - b_{n-1}$  avec  $b_n = \sum_{k=1}^n e^{ikx}$ . D'après la question

précédente,  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |b_n| = \left| \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$ . Posons  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

On a alors  $\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}} = a_n (b_n - b_{n-1})$  avec la suite  $(b_n)$  qui est bornée et la suite  $(a_n)$  qui est une suite réelle positive décroissante et de limite nulle. Par application du résultat de la question 1, on obtient la convergence de la série définissant la fonction  $S$  sur  $]0, 2\pi[$ .

**Q4.** On admet dans cette question que si  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in ]0, 2\pi[$  :

$$\left| \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}$$

- Par hypothèse l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$  converge (on peut le montrer en effectuant une intégration par parties en dérivant  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ ), alors on peut écrire  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$ .
- $\frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}}$ .

On en déduit que  $\left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right) \right|$ .

La série de Riemann  $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$  est convergente puisque  $\frac{3}{2} > 1$ , alors par comparaison la série  $\sum \left( \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right)$  est absolument convergente et on a par inégalité triangulaire :

$$\left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}$$

La constante  $C = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} > 0$  est telle que pour tout  $x \in ]0, 2\pi[$  :

$$\left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq C$$

**Q5.** Pour  $x$  fixé dans  $]0, 2\pi[$ , en effectuant le changement de variable  $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ ,  $\varphi$  étant affine croissante sur  $\mathbb{R}$ , les intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$  et  $\int_x^{+\infty} \varphi'(u) \frac{e^{iu}}{\sqrt{ux}} du = \int_x^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{x}\sqrt{u}} du$  sont de même nature et égale en cas de convergence.

Par hypothèse l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$  converge, donc  $\int_x^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$  converge et

$$I(x) = \sqrt{x} \int_x^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

**Q6.** On sait que  $\frac{e^{ix} - 1}{ix} = \frac{1 + ix + o(x) - 1}{ix} = 1 + o(1)$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ix} - 1}{ix} = 1$ .

Avec l'inégalité de la question 4, on peut écrire

$$\forall x \in ]0, 2\pi[ \quad 0 \leq \left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} \sqrt{x} S(x) - I(x) \right| \leq C\sqrt{x}$$

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^{ix} - 1}{ix} \sqrt{x} S(x) - I(x) \right) = 0$  et avec les limites vues précédemment

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} S(x) = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \text{ Finalement } S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$