1 Structure algébrique des polynômes

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit quatre lois :

- La loi $\cdot$ définie par $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}, (\lambda \cdot P)(X) = \lambda \cdot P(X)$.
- La loi $+$ définie par $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (P + Q)(X) = P(X) + Q(X)$.
- La loi $\times$ définie par $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (P \times Q)(X) = P(X) \times Q(X)$.
- La loi $\circ$ définie par $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (P \circ Q)(X) = P(Q(X))$.

Ou encore, si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ avec $a_k = 0$ pour $k \geq n$ et $b_k = 0$ pour $k \geq m$,

alors

$$(P + Q)(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k \quad P \circ Q(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k(X)$$

$$(P \times Q)(X) = P \cdot Q = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k \quad \text{avec } c_k = \sum_{p+q=k} a_p b_q$$

2 Degré d'un polynôme

Definition 2.1

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

- Si $P = 0$, on pose $\deg(P) = -\infty$.
- Sinon, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$, et on pose $\deg(P) = n$.
- a_n est appelé coefficient dominant et $a_n X^n$ terme dominant de P .
- Si $a_n = 1$, on dit que P est unitaire.

Proposition 2.1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ avec égalité lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Proposition 2.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de dimension $n + 1$ de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ la famille $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$.

Exemple 2.1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré de $P_n(X) = (X^2 + 1)^n - 2X^{2n} + (X^2 - 1)^n$.

Exemple 2.2

On considère une famille de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $T_0(X) = 1, T_1(X) = X$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Déterminer le degré de T_n , son terme dominant et sa parité.

3 Multiples et diviseurs d'un polynôme

Definition 3.1

Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

- On dit que $Q \in \mathbb{K}[X]$ divise P (ou est un diviseur de P) si il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = U \times Q$. On note $Q \mid P$.
- On dit que Q est un multiple de P si P est un diviseur de Q . On note $P \cdot \mathbb{K}[X]$ l'ensemble des multiples de P .

Proposition 3.1 *Division euclidienne*

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.

Il existe un unique $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Q est appelé le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B .

Exemple 3.1

Quel est le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)$?

Exemple 3.2

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $U(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 1$ par $V(X) = X^2 + 2X - 1$.

Exemple 3.3

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que : $B = X^2 + X + 1$ divise $P \iff P(j) = 0$.

Proposition 3.2

On donne le résultat suivant, que l'on montrera dans le chapitre Révisions d'algèbre linéaire.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

- L'ensemble $\mathbb{K}[X].P$ des multiples de P , est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus \mathbb{K}[X].P$.

4 Dérivation d'un polynôme

Definition 4.1

Soit $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle polynôme dérivé de P , le polynôme

$$P' = \sum_{k=0}^n k \alpha_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \alpha_{k+1} X^k$$

De proche en proche, on définit les polynômes dérivés successifs de P par $P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$.

Exemple 4.1

Déterminer le degré et le terme dominant de L_n le polynôme dérivé $n^{\text{ième}}$ de $(X^2 - 1)^n$.

Proposition 4.1 Formule de Taylor

Soit $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout entier $N \geq n$ et tout $a \in \mathbb{K}$, on a

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^N \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k \quad \text{ou encore} \quad P(X) = \sum_{k=0}^N \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

5 Racines d'un polynôme

Proposition 5.1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $n \in \mathbb{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(n-1)}(a) = 0$ et $P^{(n)}(a) \neq 0$.

(2) $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P(X) = (X-a)^n Q(X)$ et $Q(a) \neq 0$.

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que a est racine d'ordre de multiplicité n de P .

Proposition 5.2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts.

- On a l'équivalence suivante.

$$a_1, \dots, a_n \text{ racines de } P \iff \prod_{k=1}^n (X - a_k) \text{ divise } P(X).$$

- Si $a_1, \dots, a_n$ sont racines de P et si $\deg(P) = n$ alors $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^n (X - a_k)$ où λ est le coefficient dominant de P .
- Un polynôme P non nul a au plus $\deg(P)$ racines distinctes.

Exemple 5.1

Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $X^2 - 2X + 1$.

Remarque 5.1 *Relation coefficients/racines*

Pour trouver les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme P , on écrit

$$P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n = \lambda \prod_{k=1}^n (X - a_k)$$

On développe le produit, puis on identifie les coefficients. Il faut connaître les résultats suivants :

- Si $P(X) = aX^2 + bX + c$ et si a_1, a_2 sont ses racines, on a $S = a_1 + a_2 = \frac{-b}{a}$ et $P = a_1 a_2 = \frac{c}{a}$.
- Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et si a_1, a_2, a_3 sont ses racines, on a

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{-b}{a}, \quad a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad a_1 a_2 a_3 = \frac{-d}{a}.$$

Exemple 5.2

Déterminer les racines de $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ sachant que la somme de deux d'entre elles vaut la troisième.

6 Décomposition en produit de facteurs irréductibles

Proposition 6.1 *Théorème de d'Alembert*

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine complexe et donc tout polynôme non nul est scindé sur $\mathbb{C}$.

Proposition 6.2

Soit P polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$. Alors P s'écrit de manière unique sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{n_i}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines de P et $n_1, \dots, n_r$ leurs multiplicités respectives.

Proposition 6.3

Soit P polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$. Alors P s'écrit de manière unique sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{n_i} \times \prod_{j=1}^s (X^2 + p_j X + q_j)^{m_j}$$

avec pour tout $j \in \{1, \dots, s\}$, $p_j^2 - 4q_j < 0$.

Exemple 6.1

Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^5 - 1$.

Proposition 6.4

- Un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}^*$ a au plus n racines distinctes.
- Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ possède $n + 1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ possède une infinité de racines distinctes, alors P est le polynôme nul.

Exemple 6.2

On considère le polynôme $P(X) = X(X - 1)(X - 2) \dots (X - n)$. Démontrer que P' possède une unique racine dans $]0, 1[$.