

Exercice 1

Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos \theta + X \sin \theta)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $P_n = 1 + X^n + X^{2n} + X^{3n} + X^{4n}$.

1. Déterminer les racines complexes de P_n .
2. Pour quelles valeurs de n P_1 divise-t-il P_n ?

Exercice 4

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$ et $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$.

Montrer que les racines complexes de P ont un module majoré par $K = \max \left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right)$.

On pourra raisonner par disjonction de cas.

Exercice 5

Déterminer les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 tel que P' divise P .

Exercice 6

1. Montrer que si P est scindé à racines simples dans $\mathbf{R}[X]$ alors P' l'est aussi.
2. Montrer que si P est scindé dans $\mathbf{R}[X]$ alors P' aussi.

Exercice 7

Soit P unitaire de degré $n \geq 1$.

Montrer que P est scindé sur $\mathbf{R}$ si, et seulement si, $\forall z \in \mathbf{C}, \quad |Im(z)|^n \leq |P(z)|$.

On pourra raisonner par double implication.

Exercice 8

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ non constant tel que $P(X^2) = P(X).P(X-1)$.

1. Soit z une racine de P . Montrer que z^2 est aussi racine de P .
2. Montrer que les racines de P sont soit nulles, soit de module 1.
3. Montrer que 0 n'est pas racine de P .
4. Déterminer les polynômes solutions.

Exercice 9

On considère $f : x \mapsto \arctan(x)$.

1. Montrer l'existence d'une unique famille de polynômes (P_n) telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

2. Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n .

Exercice 10

On définit une suite de polynômes (T_n) en posant :

$$T_0 = 1 \quad T_1 = X \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant de T_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, T_n a même parité que n .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$, et justifier que T_n est l'unique polynôme vérifiant cette relation.
4. Déterminer les racines de T_n dans $[-1, 1]$, et en déduire que T_n est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$.
5. Montrer que $(X^2 - 1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$.
On pourra dériver deux fois la relation obtenue en 3.