1 Fonctions d'une variable réelle

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0}$$

On en déduit :

$$\boxed{\forall\alpha>0\quad\forall\beta\in\mathbf{R}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}=0\ \ \textit{ce qui se note aussi}\ \ \ln^\beta(x)\underset{+\infty}{=}o(x^\alpha)}$$

$$\boxed{\forall\alpha>0\quad\forall\beta\in\mathbf{R}\quad x^\alpha\ln^\beta(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0\ \ \textit{ou encore}\ \ln(x)\underset{0}{=}o\left(\tfrac{1}{x^\alpha}\right)}$$

$$\boxed{\forall a>1\quad\forall\beta\in\mathbf{R}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\beta}{a^x}=0\ \ \textit{ce qui se note aussi}\ \ x^\beta\underset{+\infty}{=}o(a^x)}$$

En effet, il suffit d'écrire, pour $\beta>0$ (*seul cas non direct*)

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta.\left(\frac{\ln t}{t}\right)^\beta\text{ avec }t=x^{\frac{\alpha}{\beta}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$

$$x^\alpha\ln^\beta(x)=(-1)^\beta\frac{\ln^\beta t}{t^\alpha}\text{ avec }t=\frac{1}{x}\underset{x\to0}{\longrightarrow}+\infty$$

$$\frac{x^\beta}{a^x}=\frac{1}{(\ln a)^\beta}.\frac{\ln^\beta t}{t}\text{ avec }t=a^x\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty,\text{ soit }x=\frac{\ln t}{\ln a}$$

Attention ! On a souvent en tête : *l'exponentielle l'emporte sur toutes les puissances qui l'emportent sur le logarithme.*
Cela peut aboutir à de faux résultats si on ne prend pas garde aux fonctions composées :

$$\frac{\ln(1+e^x)}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1\qquad\frac{e^{1+3\ln(x)}}{x^4}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Pour des fonctions composées on se ramène à l'un des trois cas cités par transformation d'écriture ou changement de variable :

$$e^{-\sqrt{x}+3\ln(x)}=e^{-\sqrt{x}\left(1-\frac{3\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$x^2e^{-\sqrt{x}}=\frac{t^4}{e^t}\text{ avec }t=\sqrt{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$

2 Suites numériques

Les résultats ci-dessus (en $+\infty$) s'appliquent bien sûr en remplaçant x réel par n entier :

$$\boxed{\forall \alpha > 0 \quad \forall \beta \in \mathbf{R} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0 \quad \textit{notamment} \quad \ln(n) \underset{+\infty}{=} o(n^\alpha)}$$

$$\boxed{\forall a > 1 \quad \forall \beta \in \mathbf{R} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0 \quad \textit{ce qui se note aussi} \quad n^\beta \underset{+\infty}{=} o(a^n)}$$

On dispose aussi des limites suivantes :

$$\boxed{\forall a > 1 \quad \frac{a^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \frac{n!}{n^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Ce que l'on peut réécrire sous la forme : $a^n = o(n!)$ et $n! = o(n^n)$.

Ces résultats s'obtiennent en majorant par une suite géométrique (voir la règle de d'Alembert).