1 Généralités

1.1 Convergence, divergence d'une série

Definition 1.1

Etant donné une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels ou complexes, on lui associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

- On dit que la série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, **est convergente** lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

  Dans ce cas, la limite S de cette suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est appelée **somme de la série**, et se note

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n}$$

- On dit que la série $\sum u_n$ **est divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.
- S_n s'appelle la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$.
- Si la série $\sum u_n$ converge et est de somme S, on appelle reste d'ordre n le nombre $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Déterminer la **nature** de la série $\sum u_n$ c'est étudier si la série est convergente ou divergente.

Exemple 1.1

Déterminer la nature de la série $\sum n^2$.

Remarque 1.1

1. **Attention aux notations** : Pour une série convergente, ne pas confondre $\sum u_n$ qui désigne la série et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui désigne la somme de la série, donc un nombre réel ou complexe.
2. **Méthodes spécifiques d'étude de séries** : Etudier la nature d'une série $\sum u_n$ revient à étudier la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ des sommes partielles, mais l'intérêt de ce chapitre est de proposer des méthodes spécifiques d'étude portant sur le terme général u_n au lieu de porter sur $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
3. **Cas d'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définie à partir d'un certain rang n_0.**
   La série de terme général u_n se note alors $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$.
   On la note parfois plus simplement $\sum u_n$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur n_0.
   Par exemple $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ se note également $\sum \frac{1}{n}$.

Avec cette notation générale, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie sur $\mathbf{N}$, alors $\sum u_n$ se note aussi $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

4. Lorsque la série $\sum u_n$ converge, la suite (R_n) des restes vérifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ et $S = S_n + R_n$.

1.2 Propriétés

Proposition 1.1 **Séries télescopiques**

Soit $\sum u_n$ une série numérique telle qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = a_{n+1} - a_n$.

La série télescopique $\sum u_n$ converge si,et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Et en cas de convergence, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - a_0$.

Exemple 1.2

• La série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

• Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
Montrer que la suite $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente. Sa limite se note γ et s'appelle la constante d'Euler.

Proposition 1.2 **Condition nécessaire de convergence**

Si la série $\sum u_n$ converge **alors** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Remarque 1.2

La propriété précédente donne une **condition nécessaire de convergence qui n'est pas suffisante**, voir la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$.

Proposition 1.3 **Opérations**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ **convergent** alors

- la série somme $\sum (u_n + v_n)$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- la série $\sum(\lambda u_n)$, produit par λ de la série $\sum u_n$, converge et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Plus généralement, toute combinaison linéaire de séries convergente est une série convergente.

Remarque 1.3

1. Si $\sum(u_n+v_n)$ converge, alors **on ne peut pas écrire** $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$.
   Cette égalité suppose la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$!

2. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n+v_n)$ diverge.

3. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors il y a incertitude sur la nature de $\sum(u_n+v_n)$.

Proposition 1.4 Cas des séries à valeurs complexes

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes, alors

$$\sum u_n \text{ converge } \iff \text{ les deux séries réelles } \sum Re(u_n) \text{ et } \sum Im(u_n) \text{ convergent}$$

Exemple 1.3 Séries géométriques

Pour $z\in\mathbf{C}^*$, la série **géométrique** $\sum z^n$, converge **si, et seulement si,** $|z|<1$

$$\text{et dans ce cas, } \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

2 Séries à termes positifs

Dans ce paragraphe, on étudie les séries à termes positifs, c'est-à-dire $\sum u_n$ avec $\forall n\in\mathbf{N}\quad u_n\geqslant 0$.

Remarque 2.1

Si $\forall n\in\mathbf{N}\quad u_n\geqslant 0$, alors la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$, est croissante.

On sait alors que cette suite admet une limite finie ou égale à $+\infty$.

Proposition 2.1 *Théorème fondamental*

Soit $\sum u_n$ **une série à termes positifs**, notons $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$ la somme partielle d'ordre n.

La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée.

On peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}S_n=\underset{n\in\mathbf{N}}{Sup}S_n \text{ est } \begin{cases} \text{un réel} \\ \text{ou} \\ \text{égale à } +\infty \end{cases}$$

Exemple 2.1 **Série harmonique**

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t} \mathrm{d}t$$

2.1 Comparaisons

Proposition 2.2 **Comparaisons par inégalités**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques.

1. Si $\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et si $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

2. Si $\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et si $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.

Proposition 2.3 **Relations de comparaisons**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à **termes positifs**.

1. Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

2. Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

3. Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

4. Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

5. Si $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple 2.2

1. La série $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

2. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

3. **Attention :** Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

$$u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

   et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge mais $\sum u_n$ ne converge pas !

2.2 Technique de comparaison série-intégrale

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction positive, monotone et continue.

• Cas d'une fonction décroissante

Si f est décroissante continue sur $[n_0, +\infty[$ alors : pour $k \geqslant n_0$ ou $k \geqslant n_0 + 1$

$$\forall t \in [k, k+1] \quad f(t) \leqslant f(k) \text{ et } \forall t \in [k-1, k] \quad f(k) \leqslant f(t)$$

Par intégration

$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$$

Par somme on obtient :

$$\forall n \geqslant n_0 + 1 \quad \sum_{k=n_0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t + f(n) \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant f(n_0) + \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$$

et par relation de Chasles on obtient :

$$\forall n \geqslant n_0 + 1 \quad \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t + f(n) \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

• Cas d'une fonction croissante

Si f est croissante continue sur $[n_0, +\infty[$ alors : pour $k \geqslant n_0$ ou $k \geqslant n_0 + 1$

$$\forall t \in [k, k+1] \quad f(k) \leqslant f(t) \text{ et } \forall t \in [k-1, k] \quad f(t) \leqslant f(k)$$

Par intégration

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t$$

Par somme :

$$\forall n \geqslant n_0 + 1 \quad \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t + f(n_0) \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=n_0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t + f(n)$$

et relation de Chasles on obtient :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant f(n) + \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

Dans certains cas, ces encadrements peuvent nous permettre d'étudier la nature de la série $\sum f(k)$, d'estimer la somme partielle de cette série lorsqu'il y a divergence ou le reste de la série lorsqu'il y a convergence.

Exemple 2.3 **Séries de Riemann**

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, on appelle série de Riemann (d'exposant α) la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 2.4

- Étudier la nature de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$.
- Déterminer un équivalent de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$.
- Si $\alpha > 1$ alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

3 Etude des séries à termes quelconques

3.1 Séries alternées

Definition 3.1

On dit qu'une série $\sum u_n$ est alternée lorsque $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n$ et u_{n+1} sont de signe contraire.

Ce qui revient à dire que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = (-1)^n a_n$ ou $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = (-1)^{n+1} a_n$, avec $a_n \in \mathbf{R}^+$ (en fait $a_n = |u_n|$).

Proposition 3.1 **Théorème spécial des séries alternées**

(Condition suffisante de convergence)

Soit $\sum u_n$ une série alternée.

Si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est **décroissante et converge vers** 0 alors la série $\sum u_n$ converge.

Et dans ce cas :

- la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est du signe du premier terme u_0 et $|S| \leqslant |u_0|$.
- le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de son premier terme u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Exemple 3.1 *Séries de Riemann alternées*

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

La série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

A redémontrer à chaque fois

3.2 Convergence absolue

Dans cette partie $\sum u_n$ est une série dont le terme général est un nombre réel ou complexe quelconque.

Definition 3.2

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque la série $\sum |u_n|$ est convergente.

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable.

Proposition 3.2

Une série absolument convergente est convergente et dans ce cas, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

La réciproque est fausse comme le montre le cas de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Definition 3.3

On dit que la série $\sum u_n$ est semi-convergente lorsque $\sum u_n$ converge mais ne converge pas absolument.

Pour étudier la nature d'une série $\sum u_n$ à termes quelconques, on peut commencer par l'étude de la convergence absolue, car la série $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs et on peut lui appliquer les résultats du paragraphe précédent.

Proposition 3.3 Comparaisons

Soit deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

1. Si $\forall n \in \mathbf{N},\quad |u_n| \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge absolument, et donc converge.
2. Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge absolument, et donc converge.
3. Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge absolument, et donc converge.
4. Si $|u_n| \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge absolument, et donc converge.

Proposition 3.4 Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes tous non nuls à partir d'un certains rang.

On suppose que la suite $\left(\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\right)$ admet une limite $\ell \in [0, +\infty]$.

- Si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge absolument, et donc converge.
- Si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement car $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = +\infty$.

Exemple 3.2

1. **Série exponentielle**

   Pour tout complexe z la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z = \exp(z)}$

2. **Règle $n^\alpha u_n$**

   - S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \longrightarrow 0$ alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
   - S'il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n \longrightarrow +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.

     Ces deux résultats sont à redémontrer à chaque fois !

   La série $\sum \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ converge et la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln^2(n)}$ diverge.

4 Produit de Cauchy de deux séries

Definition 4.1

Le produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nombres complexes est la série $\sum \omega_n$ avec :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \omega_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{q=0}^{n} u_{n-q} v_q = \sum_{i+j=n} u_i v_j = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0$$

Proposition 4.1

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **absolument convergentes** alors leur série produit de Cauchy $\sum \omega_n$ l'est aussi et on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)}$$

Remarque 4.1

Dans le théorème précédent, tout doit être indexé à partir de 0. Lorsque $\sum\limits_{n \geqslant n_1} u_n$ et $\sum\limits_{n \geqslant n_2} v_n$ convergent absolument, on se ramène à des séries indexés par $\mathbf{N}$ en complétant par des zéros :

On pose $a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \in [\![0, n_1 - 1]\!] \\ u_n \text{ si } n \geqslant n_1 \end{cases}$ et $b_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \in [\![0, n_2 - 1]\!] \\ v_n \text{ si } n \geqslant n_2 \end{cases}$.

Alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=n_1}^{+\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=n_2}^{+\infty} v_n$.

Exemple 4.1

1. Pour $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < 1$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$.

   (Prendre $u_n = v_n = z^n$)

2. Série exponentielle complexe : $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}\right)$, ce qui redonne

$$\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2, \quad \exp(z).\exp(z') = \exp(z+z')$$

5 Formule de Stirling

$$\boxed{n! \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}}$$

Remarque 5.1

Pour donner un équivalent de $(n+1)!$, il est préférable d'écrire

$$(n+1)! = (n+1)n! \sim n.\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}$$

plutôt que d'utiliser la formule de Stirling au rang $n+1$.

6 Deux résultats hors Programme

- Somme d'une série de Riemann : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

- Séries de Bertrand :

Les séries de Bertrand sont les séries $\displaystyle\sum \frac{1}{n^a(\ln n)^b}$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

- Si $a > 1$ alors la série converge.
  On intercale un α entre a et 1 et on utilise la règle du $n^\alpha u_n$.

- Si $a < 1$ alors la série diverge.
  On utilise $nu_n \to +\infty$.

- Si $a = 1$, il y a convergence **ssi** $b > 1$.
  On utilise la technique de comparaison série-intégrale.