**Exercice 1**

Étudier la convergence, et calculer la somme en cas de convergence des séries de terme général $u_n$ lorsque :

1. $u_n = 3^n$
2. $u_n = \dfrac{1}{5^n}$
3. $u_n = \dfrac{2^{n+2}}{3^{n-1}}$
4. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n^2}\right)^{n^2}$
5. $u_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$
6. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$
7. $u_n = \dfrac{9}{(3n+1)(3n+4)}$
8. $u_n = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n$
9. $u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$ avec $a, b, c$ réels tels que $a + b + c = 0$ et $(v_n)$ suite réelle qui converge vers 0.

**Exercice 2**

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs et la suite $(b_n)$ définie par : $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N} \quad b_{n+1} = b_n + \dfrac{a_n}{b_n}$.

1. Montrer que si la suite $(b_n)$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
2. Montrer que : $(b_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum a_n$ converge.

**Exercice 3**

Déterminer les réels $x$ tels que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ converge.

**Exercice 4**

On définit la suite réele $(u_n)$ par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

1. Étudier la convergence et donner la limite de la suite $(u_n)$.
2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.
3. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$. Déterminer la limite de la suite $(v_n)$.
4. On admet le théorème de Césaro :

   *Si $(x_n)$ est une suite qui converge vers $\ell$ alors* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \ell$.

   En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent simple de $u_n$.

**Exercice 5**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$. On pose $x_n = 1 - u_n$.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Trouver $k \in ]0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbf{N} \quad x_{n+1} \leqslant kx_n$. En déduire la nature de la série $\sum x_n$.

**Exercice 6**

On suppose que la série de terme général $a_n > 0$ diverge. Soit, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{S_n}$.
Déterminer la nature de la série de terme général $b_n$.
*On pourra faire une disjonction de cas.*

**Exercice 7**

Soit $a > 0$. On pose $u_n = n! \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{a}{k}\right)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$ lorsque $a \neq 1$ ?
2. Montrer que : $\forall x \in ]0,1[ \quad \ln(1+x) \geqslant x - x^2$.
3. En déduire la nature de la série $\sum u_n$ lorsque $a = 1$.

**Exercice 8**

Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand $n$ tend vers l'infini, en utilisant :
• la technique de comparaison série-intégrale
• une somme de Riemann.

**Exercice 9**

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln(n) + (-1)^n}$.

**Exercice 10**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \sin\left(\pi n^3 \left(\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)\right)^2\right)$.

1. Déterminer des réels $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ tels que
$$\left(\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)^2 = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \frac{a_4}{n^4} + \frac{a_5}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$$
2. En déduire qu'il existe un réel $\alpha$ tel que $\sin\left(\pi n^3 \left(\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)\right)^2\right) = \alpha.\dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Conclure quant à la nature de la série $\sum u_n$.

**Exercice 11**

Déterminer la nature et, en cas de convergence, la somme des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(n-k)^2}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(n-k)!}\right)$.

**Exercice 12**

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

1. On suppose que $\sum v_n$ diverge.
   (a) Montrer que si $u_n = o(v_n)$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
   (b) Montrer que si $u_n \sim v_n$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.
2. Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que $u_0 = a$, $u_1 = b$, avec $(a, b) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$, et $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Montrer que $(u_n)$ est bien définie. Montrer que $(u_n)$ est divergente.
   (b) Montrer que $\displaystyle u_{n+2}^2 - u_1^2 = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k^2}$.
   (c) Montrer que $u_n \sim \sqrt{2n}$.