Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1 : Une équation fonctionnelle sur les polynômes

Soit $\mathbf{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes. Dans tout cet exercice, on identifie les éléments de $\mathbf{C}[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(*) \qquad P(X^2-1) = P(X-1)P(X+1)$$

1. Montrer que si a est racine de P alors $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont aussi des racines de P.

2. Soit $a_0 \in \mathbf{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geq 0}$ en posant, pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

   (a) Vérifier que lorsque a_0 est une racine de P, pour tout entier naturel n le nombre complexe a_n est une racine de P.

   (b) Montrer que lorsque a_0 est un réel strictement positif, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs.

   (c) En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.

   (d) Montrer que -1 n'est pas racine de P.

   (e) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.

3. Déduire des questions précédentes que si a est une racine complexe de P alors $|a+1| = 1$. On admettra que l'on a aussi $|a-1| = 1$.

4. Montrer que si le degré de P est strictement positif alors P a pour unique racine 0.

5. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ qui vérifient la relation $(*)$.

Exercice 2 : Polynômes et fraction rationnelle

Dans cet exercice on considère l'espace vectoriel $\mathbf{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On fixe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et on note T le polynôme $X^n + 1$.

6. Montrer que T admet n racines simples dans $\mathbf{C}$.

On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines de T.

7. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\displaystyle\prod_{j \neq k}(z_k - z_j) = T'(z_k)$.

Soit $\ell \in [\![0, n]\!]$. On considère la fraction rationnelle F donnée par $F = \dfrac{X^\ell}{X^n + 1}$.
On rappelle que, par décomposition en éléments simples de F, il y a existence et unicité de $\mu_1, \ldots, \mu_n$ dans $\mathbf{C}$ et de E dans $\mathbf{C}[X]$ tels que

$$F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{X - z_k} + E.$$

8. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mu_k = -\dfrac{z_k^{\ell+1}}{n}$ et que E est soit le polynôme nul, soit le polynôme constant égal à 1.
9. Calculer $F'(1)$ et en déduire que $\ell = \dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k - 1)^2}$.
10. En déduire que :
    (a) pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}_n[X]$, $\quad XP'(X) = \dfrac{n}{2}P(X) + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$;
    (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(z_k - 1)^2} = -\frac{n^2}{4}$.

Exercice 3 : Racines d'un polynôme

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

On définit la suite de polynômes $(R_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ de polynômes par : $R_1 = X$, $R_2 = X^2 - 2$ et, pour tout entier supérieur ou égal à 2 :

$$R_{k+1} = XR_k - R_{k-1}$$

Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par :

$$Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k, \text{ tel que } a_{2n} \neq 0 \text{ et } \forall k \in [\![0, n]\!] \quad a_k = a_{2n-k}$$

11. Montrer que pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant :

$$\forall z \in \mathbf{C}^* \quad R_k\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^k + \frac{1}{z^k}$$

12. Pour tout réel a, déterminer, s'ils existent, les complexes z non nuls qui vérifient la relation : $z + \dfrac{1}{z} = a$. *On distinguera trois cas.*

13. Justifier que 0 n'est pas racine de Q.

14. On définit le polynôme $\widetilde{Q}$ par $\widetilde{Q} = a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k$. Soit z un complexe non nul, on pose $y = z + \frac{1}{z}$.
    (a) Exprimer $z^n \widetilde{Q}(y)$ en fonction de $Q(z)$.
    (b) En déduire que $Q(z)$ est nul, si et seulement si $\widetilde{Q}(y)$ est nul.
    (c) Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?

15. On suppose dans cette question de $Q = X^6 + X^5 - 9X^4 + 2X^3 - 9X^2 + X + 1$.
    (a) Vérifier que $\widetilde{Q} = X^3 + X^2 - 12X$.
    (b) En déduire les racines de $\widetilde{Q}$ puis celles de Q.

Exercice 4 : Théorème de comparaison avec une intégrale

Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$, $J_n = \int_0^n f(t)\mathrm{d}t$ et pour tout entier k non nul, $I_k = \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$.

16. Préciser la monotonie des suites (S_n) et (J_n), puis démontrer que pour tout entier k non nul,
$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k-1).$$

17. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}$.

18. Démontrer enfin les deux résultats :
    (1) La fonction $x \mapsto \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$, si et seulement si, la série $\sum f(n)$ converge.
    (2) La série $\sum_{n\geq 1} \left(\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right)$ converge.

19. **Un exemple.**
    On pose pour $\alpha > 0$ et $x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
    (a) Étudier la monotonie de la fonction f, calculer $\int_2^x f(t)\mathrm{d}t$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.
    (b) Dans le cas où $\alpha = 2$, déterminer en fonction de $\ln 2$, un encadrement de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

20. **Une application.**

    On pose pour n entier naturel non nul, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

    (a) En utilisant le résultat **(2)** de la question **Q18**, établir que la suite (T_n) converge. On notera γ sa limite (constante d'Euler).

    (b) Justifier que, au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ et en déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Fin de l'énoncé