Exercice 1 : Extrait de e3a 2011 PSI

Soit $\mathbf{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes. Dans tout cet exercice, on identifie les éléments de $\mathbf{C}[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(*) \qquad P(X^2-1) = P(X-1)P(X+1)$$

1. On suppose que a est racine de P alors $P(a)=0$ et donc l'égalité $(*)$ donne

$$P\left((a+1)^2-1\right) = P((a+1)-1).P((a+1)+1) = P(a).P(a+2) = 0$$

   et

$$P\left((a-1)^2-1\right) = P((a-1)-1).P((a-1)+1) = P(a-2).P(a) = 0$$

   On en déduit que $\boxed{(a+1)^2-1 \text{ et } (a-1)^2-1 \text{ sont aussi des racines de } P.}$

2. Soit $a_0 \in \mathbf{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geq 0}$ en posant, pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

   (a) On suppose que a_0 est une racine de P.
   Soit n tel que a_n soit racine de P. En appliquant le résultat de la question précédente, on sait que $(a_n+1)^2-1$ est racine de P or $(a_n+1)^2-1 = a_n^2+2a_n = a_{n+1}$, donc a_{n+1} est racine de P.

   On a montré par récurrence que $\boxed{\text{si } a_0 \text{ est racine de } P \text{ alors } \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n \text{ est racine de } P.}$

   (b) On suppose que a_0 est un réel strictement positif.

   <u>1ère rédaction :</u>
   On a immédiatement : $a_n > 0 \Longrightarrow a_n^2 + 2a_n > 0$, donc $a_n > 0 \Longrightarrow a_{n+1} > 0$.
   On vient d'obtenir par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n > 0$ et donc
   $a_{n+1} - a_n = a_n^2 + a_n > 0$.

   $\boxed{\text{Si } a_0 > 0 \text{ alors la suite } (a_n)_{n\geq 0} \text{ est une suite strictement croissante de réels strictement positifs.}}$

   <u>2ième rédaction :</u>
   Par hypothèse $a_0 > 0$ donc $a_1 = a_0^2 + 2a_0 > a_0 > 0$.
   Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $a_{n+1} > a_n > 0$.
   Puisque $a_{n+1} > 0$, on a $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} > a_{n+1} > 0$.
   On a donc obtenu par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_{n+1} > a_n > 0$. La suite (a_n) est donc une suite strictement croissante de réels strictement positifs.

   (c) Si P admet une racine réelle strictement positive notée a, alors, d'après les questions précédentes, la suite (a_n) définie par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ est une suite de réels tous distincts qui sont tous racines de P. On en déduit que P admet une infinité de racines, ce qui entraine que P est le polynôme nul. C'est absurde puisque par hypothèse P n'est pas le polynôme nul.

$\boxed{\text{On a montré par l'absurde que } P \text{ n'admet pas de racine réelle strictement positive.}}$

(d) Si $a = -1$ est racine de P, alors $(a-1)^2 - 1 = 3$ est racine de P, ce qui est absurde d'après le résultat de la question précédente.

$\boxed{-1 \text{ n'est donc pas racine de } P.}$

(e) Pour $n = 0$ on a bien : $a_n + 1 = (a_0 + 1)^{2^n}$.
Soit n tel que $a_n + 1 = (a_0 + 1)^{2^n}$. On a alors

$$a_{n+1} + 1 = a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n + 1)^2 = \left((a_0 + 1)^{2^n}\right)^2 = (a_0 + 1)^{2^n \times 2} = (a_0 + 1)^{2^{n+1}}$$

$\boxed{\text{On a donc montré par récurrence que } \forall n \in \mathbf{N} \quad a_n + 1 = (a_0 + 1)^{2^n}.}$

3. Soit a une racine complexe de P. On peut définir la suite (a_n) par $a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$ et on sait qu'alors $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n$ est racine de P avec $a_n + 1 = (a+1)^{2^n}$.

Première méthode :

• Si $|a+1| < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n + 1| = \lim\limits_{n \to +\infty} |a+1|^{2^n} = 0$, donc la suite (a_n) converge vers (-1).
Par continuité on a $\lim\limits_{n \to +\infty} P(a_n) = P(-1)$ et puisque $P(a_n) = 0$ l'unicité de la limite donne $P(-1) = 0$, ce qui est exclu par le résultat de la question (d).

• Si $|a+1| > 1$, alors la suite $(|a_n + 1|)$ est strictement croissante, on en déduit que $\forall (n,p) \in \mathbf{N}^2 \quad n \neq p \Longrightarrow a_n \neq a_p$ et P admet alors une infinité de racines, ce qui est exclu puisque P n'est pas le polynôme nul.

$\boxed{\text{On en déduit que } |a+1| = 1.}$ On admettra que l'on a aussi $|a-1| = 1$.

Seconde méthode :

On a vu que si a_0 est racine de P alors a_n est racine de P, et P n'est pas le polynôme nul, il n'admet donc pas une infinité de racines. On en déduit :

$$\exists (n,k) \in \mathbf{N}^2 \text{ tel que } n \neq k \text{ et } a_n = a_k$$

ce qui donne

$$(a+1)^{2^n} = (a+1)^{2^k}$$

Or $a \neq -1$ (question 2(d)) donc

$$(a+1)^{2^n - 2^k} = 1$$

et par passage au module :

$$|a+1|^{2^n-2^k}=1$$

toute fonction puissance est injective sur $]0,+\infty[$ alors $|a+1|=1$.

4. Si le degré de P est strictement positif alors P admet au moins une racine complexe a. Notons $a=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

   On sait que $|a+1|=1$ et $|a-1|=1$ or

$$\left\{\begin{array}{rcl}|a+1|&=&1\\|a-1|&=&1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}|a+1|^2&=&1\\|a-1|^2&=&1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}(x+1)^2+y^2&=&1\\(x-1)^2+y^2&=&1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}x^2+2x+y^2&=&0\\x^2-2x+y^2&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}x^2+2x+y^2&=&0\\4x&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}|a+1|&=&1\\|a-1|&=&1\end{array}\right. \iff a=0$$

   On pouvait aussi utiliser de la géométrie : $|a+1|=1$ signifie que le point d'affixe a est sur le cercle de centre le point $(-1,0)$ et de rayon 1 et $|a-1|=1$ signifie que le point d'affixe a est sur le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1. Or ces deux cercles admettent pour unique point commun le point $(0,0)$ donc $a=0$.

   Si $deg(P)>0$ alors P a pour unique racine 0.

5. D'après ce qui précède P vérifie la relation $(*)$ si et seulement si il existe $(\lambda,n)\in\mathbf{R}\times\mathbf{N}$ tel que $P=\lambda X^n$. Dans ce cas on a :

$$P(X^2-1)=P(X-1)P(X+1)\iff\lambda(X^2-1)^n=\lambda^2(X-1)^n(X+1)^n\iff\lambda=\lambda^2$$

   On en déduit que les polynômes vérifiant $(*)$ sont le polynôme nul et les polynômes X^n avec $n\in\mathbf{N}$

Exercice 2 : Extrait de Centrale PC 2025

Dans cet exercice on considère l'espace vectoriel $\mathbf{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes. Pour $n\in\mathbf{N}$, on note $\mathbf{C}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On fixe un entier $n\in\mathbf{N}^*$ et on note T le polynôme X^n+1.

6. T est scindé sur $\mathbf{C}$, donc T admet n racines distinctes ou non.
   On sait que $z \in \mathbf{C}$ est une racine multiple de T si, et seulement si $T(z) = 0 = T'(z)$.
   $T' = nX^{n-1}$ n'admet pas de racine si $n = 1$ et admet pour unique racine le complexe 0 si $n \geqslant 1$ or $T(0) = 1 \neq 0$.

   On en déduit que T n'a pas de racine multiple et donc $\boxed{T \text{ admet } n \text{ racines simples dans } \mathbf{C}.}$

   Autre méthode (plus longue me semble-t-il et il n'était pas demandé de trouver les racines de T) :
   Soit $a \in \mathbf{C}^*$, on sait que les complexes z vérifiant $z^n = a = |a|e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbf{R}$ sont les nombres $\sqrt[n]{|a|}\exp\left(i\dfrac{\theta}{n} + 2i\dfrac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in [\![1, n]\!]$.
   Soit $z \in \mathbf{C}$, $P(z) = 0 \iff z^n = -1 = e^{i\pi}$, donc les racines de T sont les complexes $z_k = \exp\left(i\dfrac{2k+1}{n}\pi\right)$ avec $k \in [\![1, n]\!]$, ces n complexes sont distincts puisque la fonction $\theta \mapsto \exp(i\theta)$ est injective sur tout intervalle d'amplitude strictement inférieure à 2π et que $\dfrac{2k+1}{n}\pi \in \left[\dfrac{3\pi}{n}, 2\pi + \dfrac{\pi}{n}\right]$. T, de degré n, admet donc n racines distinctes qui sont donc simples.

On note $z_1, \dots, z_n$ les racines de T.

7. T étant un polynôme unitaire de degré n avec n racines distinctes $z_1, \dots, z_n$, on sait que

$$T = \prod_{\ell=1}^{n}(X - z_\ell)$$

   Par dérivation d'un produit on obtient :

$$T' = \sum_{\ell=1}^{n}\prod_{j\neq\ell}(X - z_j)$$

   Soit $k \in [\![1, n]\!]$, pour $j = k$, $(z_k - z_j) = 0$ on en déduit que

$$\forall \ell \in [\![1, n]\!] \quad \ell \neq k \Longrightarrow \prod_{j\neq\ell}(z_k - z_j) = 0. \prod_{\jmath\neq\ell,k}(z_k - z_j) = 0$$

   et donc

$$T'(z_k) = \sum_{\ell=1}^{n}\prod_{j\neq\ell}(z_k - z_j) = \prod_{j\neq k}(z_k - z_j) + \sum_{\ell\neq k} 0$$

$$\boxed{\text{On a bien } \forall k \in [\![1, n]\!] \quad \prod_{j\neq k}(z_k - z_j) = T'(z_k).}$$

Soit $\ell \in [\![0, n]\!]$. On considère la fraction rationnelle F donnée par $F = \dfrac{X^\ell}{X^n + 1}$.
On rappelle que, par décomposition en éléments simples de F, il y a existence et unicité de $\mu_1, \dots, \mu_n$ dans $\mathbf{C}$ et de E dans $\mathbf{C}[X]$ tels que

$$F = \sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_k}{X - z_k} + E.$$

8. • Par réduction au même dénominateur, sachant que $X^n+1=T=\prod_{j=1}^{n}(X-z_j)$, on a :

$$F=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_k}{X-z_k}+E=\frac{(X^n+1)E(X)+\sum_{k=1}^{n}\mu_k\prod_{j\neq k}(X-z_j)}{X^n+1}$$

On en déduit que $X^\ell=(X^n+1)E(X)+\sum_{k=1}^{n}\mu_k\prod_{j\neq k}(X-z_j)$ avec $deg\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\prod_{j\neq k}(X-z_j)\right)\leqslant n-1$, par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne de X^ℓ par X^n+1, on obtient $\forall \ell\in[\![0,n-1]\!]\quad E=0$ et $\ell=n\Longrightarrow E=1$.

• Pour $p\in[\![1,n]\!]$ en évaluant en z_p l'égalité $X^\ell=(X^n+1)E(X)+\sum_{k=1}^{n}\mu_k\prod_{j\neq k}(X-z_j)$, on obtient

$$z_p^\ell=0+\mu_p\prod_{j\neq p}(z_p-z_j)=\mu_p.T'(z_p)=\mu_p.n.z_p^{n-1}$$

Or $T(z_p)=z_p^n+1=0$ donc $z_p^n=-1$ et finalement $z_p^\ell=-\mu_p.n.z^{-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k\in[\![1,n]\!],\ \mu_k=-\frac{z_k^{\ell+1}}{n}\text{ et } E=0 \text{ ou } E=1.}$$

9. Pour $x\in\mathbf{C}$.

• D'une part, $F(x)=\dfrac{x^\ell}{x^n+1}$, donc $F'(x)=\dfrac{\ell x^{\ell-1}(x^n+1)-nx^{n-1}x^\ell}{(x^n+1)^2}$ et $\boxed{F'(1)=\dfrac{2\ell-n}{2^2}=\dfrac{\ell}{2}-\dfrac{n}{4}.}$

• D'autre part, $F(x)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\mu_k}{x-z_k}+E$ avec $E=0$ ou $E=1$, donc $F'(x)=\sum_{k=1}^{n}-\dfrac{\mu_k}{(x-z_k)^2}$.

1 n'est pas racine de $T=X^n+1$ donc $\forall k\in[\![1,n]\!]\quad z_k\neq 1$ et $F'(1)=\sum_{k=1}^{n}-\dfrac{\mu_k}{(1-z_k)^2}$.

En utilisant $\mu_k=-\dfrac{z_k^{\ell+1}}{n}$ et $F'(1)=\dfrac{\ell}{2}-\dfrac{n}{4}$, on obtient

$$\boxed{\ell=\frac{n}{2}+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k-1)^2}.}$$

10. (a) Soit $P\in\mathbf{C}_n[X]$, il existe $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbf{C}^n$ tel que $P=\sum_{\ell=0}^{n}a_\ell X^\ell$ et $P'=\sum_{\ell=1}^{n}\ell a_\ell X^{\ell-1}$.

On a donc $XP'(X) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell a_\ell X^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} \ell a_\ell X^\ell$ et on sait par le résultat de la question précédente que $\ell \in [\![0,n]\!] \Longrightarrow \ell = \dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{z_k^{\ell+1}}{(z_k-1)^2}$ donc

$$\begin{aligned}
XP'(X) &= \sum_{\ell=0}^{n}\left(\frac{n}{2} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k-1)^2}\right)a_\ell X^\ell \\
&= \frac{n}{2}\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell + \frac{2}{n}\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_\ell \frac{z_k^{\ell+1}}{(z_k-1)^2}X^\ell \\
&= \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{z_k}{(z_k-1)^2}.a_\ell(z_kX)^\ell \\
XP'(X) &= \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k}{(z_k-1)^2}P(z_kX)
\end{aligned}$$

(b) <u>Première méthode :</u> En reprenant l'égalité précédente avec le polynôme $P = 1$, on obtient

$$0 = \frac{n}{2} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k}{(z_k-1)^2}$$

et donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k}{(z_k-1)^2} = -\frac{n^2}{4}.}$

<u>Seconde méthode :</u> Dans la question 9 on a vu $\ell = \dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{z_k^{\ell+1}}{(z_k-1)^2}$ pour tout ℓ dans $[\![0,n]\!]$. En prenant le cas particulier $\ell = 0$, on obtient $0 = \dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{z_k}{(z_k-1)^2}$, ce qui donne comme vu précédemment le résultat demandé.

Exercice 3 : Extrait de CCINP TSI 2025

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

On définit la suite de polynômes $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ de polynômes par : $R_1 = X$, $R_2 = X^2 - 2$ et, pour tout entier supérieur ou égal à 2 :

$$R_{k+1} = XR_k - R_{k-1}$$

Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par :

$$Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k,\ \text{tel que } a_{2n} \neq 0 \text{ et } \forall k \in [\![0,n]\!] \quad a_k = a_{2n-k}$$

11. Soit $z \in \mathbf{C}^*$.

   • $R_1 = X$ et $R_2 = X^2 - 2$ donc R_1 est de degré 1 et $R_1\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = \left(z+\dfrac{1}{z}\right) = z^1 + \dfrac{1}{z^1}$.
   R_2 est de degré 2 et $R_2\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = \left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2 - 2 = z^2 + 2 + \dfrac{1}{z^2} - 2 = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^2}$.

   • Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que R_k et R_{k+1} soient respectivement de degré k et $k+1$ et vérifient $R_k\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = z^k + \dfrac{1}{z^k}$ et $R_{k+1}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = z^{k+1} + \dfrac{1}{z^{k+1}}$.

   Par hypothèse $R_{k+2} = XR_{k+1} - R_k$ avec $deg(XR_{k+1}) = 1 + (k+1) > k = deg(R_k)$ donc $deg(R_{k+2}) = deg(XR_{k+1}) = k+2$ et

$$\begin{aligned}
R_{k+2}\left(z+\frac{1}{z}\right) &= \left(z+\frac{1}{z}\right)R_{k+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) + R_k\left(z+\frac{1}{z}\right)\\
&= \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{k+1}+\frac{1}{z^{k+1}}\right) - \left(z^k+\frac{1}{z^k}\right)\\
&= z^{k+2} + \frac{1}{z^k} + z^k + \frac{1}{z^{k+2}} - z^k - \frac{1}{z^k}\\
R_{k+2}\left(z+\frac{1}{z}\right) &= z^{k+2} + \frac{1}{z^{k+2}}
\end{aligned}$$

   On a ainsi prouvé par récurrence double que $\forall k \in \mathbf{N}^*$ R_k est un polynôme de degré k vérifiant :

$$\forall z \in \mathbf{C}^* \quad R_k\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^k + \frac{1}{z^k}$$

12. Soit un réel a, on cherche les complexes z non nuls qui vérifient la relation : $z + \dfrac{1}{z} = a$, ce qui revient à résoudre l'équation du second degré $x^2 - ax + 1 = 0 \quad (*)$ sur $\mathbf{C}^*$. Cette équation n'admet pas 0 pour solution et est de discriminant $\Delta = a^2 - 4$.

   <u>1er cas : $a \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$</u>
   On sait alors que $\Delta > 0$ et donc les solutions de $(*)$ sont les réels $\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$ et $\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$.

   <u>2ème cas : $a \in]-2, 2[$</u>
   On sait alors que $\Delta = \left(i\sqrt{4-a^2}\right)^2$ et donc les solutions de $(*)$ sont les complexes conjugués $\dfrac{a-i\sqrt{4-a^2}}{2}$ et $\dfrac{a+i\sqrt{4-a^2}}{2}$.

   <u>3ème cas : $a \in \{-2, 2\}$</u>
   On a alors $\Delta = 0$ et la seule solution de $(*)$ est le réel $\dfrac{a}{2}$.

13. Par définition de Q on a $Q(0) = a_0 = a_{2n} \neq 0$. $\boxed{\text{0 n'est pas racine de } Q.}$

14. On définit le polynôme $\widetilde{Q}$ par $\widetilde{Q} = a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k$. Soit z un complexe non nul, on pose $y = z + \dfrac{1}{z}$.

   (a) Par définition de $\widetilde{Q}$ et par le résultat de la question 11 on a :

$$\begin{aligned} z^n \widetilde{Q}(y) &= z^n a_n + \sum_{k=1}^{n} z^n a_{n-k} R_k \left(z + \frac{1}{z}\right) \\ &= a_n z^n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} z^{n+k} + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} z^{n-k} \end{aligned}$$

par les changements d'indices $j = n + k$ et $\ell = n - k$ on a :

$$z^n \widetilde{Q}(y) = z^n a_n + \sum_{j=n+1}^{2n} a_{2n-j} z^j + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell z^\ell$$

par hypothèse $a_{2n-j} = a_j$ donc

$$z^n \widetilde{Q}(y) = a_n z^n + \sum_{j=n+1}^{2n} a_j z^j + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell z^\ell$$

$$\boxed{\text{Finalement } z^n \widetilde{Q}(y) = Q(z).}$$

   (b) Puisque 0 n'est pas racine de Q, l'égalité précédente permet d'obtenir directement $Q(z) = 0 \iff \widetilde{Q}(y) = 0$ avec $y = z + \dfrac{1}{z}$.

   (c) L'intérêt de l'égalité précédente dans la recherche des racines du polynôme Q est de passer d'un polynôme Q de degré $2n$ à un polynôme $\widetilde{Q}$ de degré n seulement. Et connaissant les racines de $\widetilde{Q}$ on obtient celles de Q en utilisant les résultats de la question 12.

15. On suppose dans cette question de $Q = X^6 + X^5 - 9X^4 + 2X^3 - 9X^2 + X + 1$.

   (a) On a $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ avec $n = 3$, $a_6 = a_0 = 1 \neq 0$, $a_5 = a_1 = 1$, $a_4 = a_2 = -9$ et $a_3 = 2$.

   Alors par définition $\widetilde{Q} = a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k = a_3 + a_2 R_1 + a_1 R_2 + a_0 R_3$.

   On sait que $R_1 = X$, $R_2 = X^2 - 2$ donc $R_3 = XR_2 - R_1 = X^3 - 2X - X = X^3 - 3X$ donc

$$\widetilde{Q} = 2 - 9X + (X^2 - 2) + X^3 - 3X = X^3 + X^2 - 12X$$

   (b) • $\widetilde{Q} = X(X^2 + X - 12) = X\left[\left(X + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{49}{4}\right] = X\left(X + \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2}\right)\left(X + \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{2}\right)$.

$$\boxed{\text{Les racines de } \widetilde{Q} = X(X+4)(X-3) \text{ sont les réels } -4, 0 \text{ et } 3.}$$

• On déduit de ce qui précède que $Q(z) = 0 \iff z + \dfrac{1}{z} = 0$ ou $z + \dfrac{1}{z} = -4$ ou $z + \dfrac{1}{z} = 3$. Les résultats de la question 12 avec $a = 0$, $a = -4$ et $a = 3$, permettent d'obtenir directement

$$Q(z) = 0 \iff z \in \left\{ -i, i, -2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$\boxed{\text{Les racines de } Q \text{ sont donc les nombres } -i, i, -2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{3+\sqrt{5}}{2}.}$$

Exercice 4 : Extrait de CCINP MP 2025

Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$, $J_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$ et pour tout entier k non nul, $I_k = \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$.

16. $\forall n \in \mathbf{N} \quad S_{n+1} - S_n = f(n+1) \geqslant 0$, donc la suite (S_n) est croissante.

    Par relation de Chasles, $J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$, or f est continue, positive sur le segment $[n, n+1]$ donc $J_{n+1} - J_n \geqslant 0$. La suite (J_n) est croissante.

    • f est décroissante sur $\mathbf{R}^+$ donc $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \forall t \in [k-1, k] \quad f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k-1)$ et par intégration sur le segment $[k-1, k]$, on obtient $\boxed{f(k) \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k-1).}$

17. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, en sommant les inégalités $f(k) \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k-1)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient

    $$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k-1)$$

    Par relation de Chasles pour l'intégrale et par changement d'indice sur la somme de droite dans l'encadrement précédent on obtient directement $\boxed{S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}.}$

18. **(1)** La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ est croissante (puisque f est continue et positive), donc cette fonction admet une limite en $+\infty$ qui est soit finie, soit égale à $+\infty$. Notons $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = L \in [0, +\infty]$, par caractérisation séquentielle

$\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = L$.

• Si la série $\sum f(n)$ converge alors la suite croissante (S_n) converge vers sa borne supérieure, que l'on note S. Avec le résultat de la question 17, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad J_n \leqslant S_{n-1} \leqslant S$$

La suite croissante (J_n) est majorée alors elle converge et donc $L \in \mathbf{R}$. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ admet donc une limite finie en $+\infty$, et $x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ aussi .

• Réciproquement si $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = L_1 \in \mathbf{R}^+$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = L \in \mathbf{R}^+$ et la suite croissante (J_n) converge vers L qui est sa borne supérieure. Le résultat de la question 17 donne :

$$S_n \leqslant J_n + f(0) \leqslant L + f(0)$$

La suite croissante (S_n) est donc majorée et par conséquent elle converge. La série $\sum f(n)$ est donc convergente.

Par double implication on a montré :

> la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, la série $\sum f(n)$ converge.

(2) <u>Première méthode :</u> D'après l'encadrement $f(n) \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(n-1)$ prouvé en question 16, on a :

$$0 \leq \int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t - f(n) \leqslant f(n-1) - f(n) \quad (**)$$

Par hypothèse la fonction f est décroissante et minorée puisque positive, alors la suite $(f(n))$ est décroissante et minorée donc converge et par conséquent la série télescopique $\sum f(n-1) - f(n)$ converge.
Par comparaison pour des séries à termes positifs, on déduit de $(**)$ que

> la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)\right)$ converge.

<u>Seconde méthode :</u> D'après l'encadrement $S_n - f(0) \leqslant J_n \leqslant S_{n-1}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ vu en question 17, on a : $-f(0) \leqslant J_n - S_n \leqslant -f(n)$.

Or $J_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t)\mathrm{d}t$ donc

$$-f(0) \leqslant \sum_{k=1}^n \left(\int_{k-1}^k f(t)\mathrm{d}t - f(k)\right) - f(0) \leqslant -f(n)$$

et donc $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t - f(k)\right) \leqslant f(0) - f(n) \leqslant f(0) \quad (***)$.

Par le résultat de la question 16, on sait que $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t - f(k) \geqslant 0$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right)$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée, ce qui est le cas d'après l'encadrement $(***)$.

19. **Un exemple.**

On pose pour $\alpha > 0$ et $x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

(a) • La fonction f est de classe C^1 sur $[2, +\infty[$ en tant qu'inverse d'un produit de fonctions de classe C^1 strictement positives avec

$$f'(x) = -\frac{(\ln x)^\alpha + x\alpha.(1/x)(\ln x)^{\alpha-1}}{x^2(\ln x)^{2\alpha}} = -\frac{\alpha + \ln x}{x(\ln x)^{\alpha+1}} < 0$$

On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.

• $\displaystyle\int_2^x f(t)\mathrm{d}t = \int_2^x \frac{u'(t)}{u^\alpha}(t)\mathrm{d}t$ avec $u(t) = \ln t$.

On en déduit que pour $x \in [2, +\infty[$

$$\int_2^x f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{1-\alpha}u^{1-\alpha}(t)\right]_2^x & \text{si } \alpha \neq 1 \\ [\ln|u(t)|]_2^x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\ln^{1-\alpha}(x) - \ln^{1-\alpha}(2)\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

La fonction f étant positive, décroissante et continue sur $[2, +\infty[$, on peut appliquer le résultat **(1)** de la question 18 : la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge si, et seulement si, $x \mapsto \displaystyle\int_2^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$.

Par le calcul précédent, pour $\alpha > 0$, on a immédiatement

$$\lim_{x\to+\infty}\int_2^x f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{\ln^{1-\alpha}(2)}{\alpha - 1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

(b) Dans le cas où $\alpha = 2$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge.

Comme dans la question 17, on a, en notant $J_n = \displaystyle\int_2^n f(t)\mathrm{d}t$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(n)$

$$S_n - f(2) \leqslant J_n \leqslant S_{n-1}$$

Ou encore

$$J_{n+1} \leqslant S_n \leqslant J_n + f(2)$$

Par passage à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient, avec le résultat de la question précédente :

$$\boxed{\frac{1}{\ln(2)} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leqslant \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{2\ln^2(2)}}$$

20. **Une application.**

On pose pour n entier naturel non nul, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

(a) On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Cette fonction est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, alors le résultat **(2)** de la question **Q18**, donne la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \left(\int_{n-1}^{n} f(f)\mathrm{d}t - f(n) \right)$ donc la convergence de la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant 2}$ avec :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t - f(k) \right) = \int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 1 = 1 - T_n$$

Donc $T_n = 1 - S_n$ et $\boxed{\text{la suite } (T_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ est convergente.}}$

On notera γ sa limite (constante d'Euler).

(b) On a vu $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = \gamma$, ce que l'on peut réécrire sous la forme $T_n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$ et donc, au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + o(\ln n)$ et donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n.}$

Fin du corrigé