1 Fonctions continues par morceaux

Definition 1.1 *Subdivision d'un segment*

On appelle subdivision d'un segment $[a, b]$ toute suite finie $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de réels telle que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$.

Definition 1.2

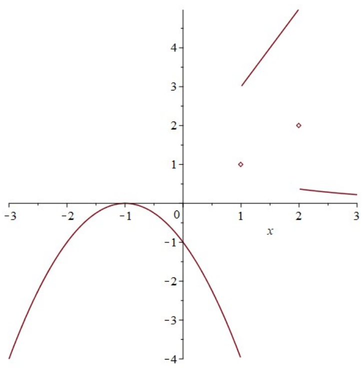
• Une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est dite **continue par morceaux** sur le segment $[a, b]$ $(a < b)$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$ la restriction de $f_{|]a_k, a_{k+1}[}$ soit prolongeable en une fonction continue sur $[a_k, a_{k+1}]$.

Une telle subdivision σ est dite **adaptée** ou **subordonnée** à f (elle n'est pas unique).

• Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est dite **continue par morceaux** sur l'intervalle I si elle l'est sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I.

Interprétation : Une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est dite **continue par morceaux** s'ile xiste une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que la restriction $f_{|]a_k, a_{k+1}[}$ soit continue sur $)a_k, a_{k+1}[$ et admette des limites finies en a_k et en a_{k+1}.

Exemple 1.1



2. Toute fonction en escalier sur un segment $[a, b]$ est continue par morceaux sur ce segment.

3. Toute fonction continue sur un intervalle I est continue par morceaux sur cet intervalle.

4. La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

Remarque 1.1 *Subdivision adaptée à deux fonctions continues par morceaux*

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{K}$ $(a < b)$ une fonction continue par morceaux, et soit $\sigma = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.

   Si on ajoute un point à la subdivision σ, alors on obtient encore une subdivision adaptée à f.

2. Si $f : [a, b] \to \mathbf{K}$ et $g : [a, b] \to \mathbf{K}$ sont deux fonctions continues par morceaux, alors il existe une subdivision adaptée à la fois à f et à g.

Proposition 1.1 *Propriétés algébriques*

On note $\mathcal{CM}(I, \mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I.

$$\mathcal{CM}(I, \mathbf{K}) \text{ est un } \mathbf{K}\text{-espace vectoriel stable par produit.}$$

Proposition 1.2

Soit $f : [a, b] \to \mathbf{K}$.

Si f est continue par morceaux sur le **segment** $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$.

2 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Dans ce paragraphe, on considère $f : I \to \mathbf{K}$ une fonction continue par morceaux, un segment $[a, b] \subset I$ et $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.

Definition 2.1 *Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment*

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note f_i la restriction de f à $]a_{i-1}, a_i[$ prolongée par continuité sur $[a_{i-1}, a_i]$.

On définit $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$par :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\mathrm{d}t = \int_{a_0}^{a_1} f_1(t)\mathrm{d}t + \int_{a_1}^{a_2} f_2(t)\mathrm{d}t + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f_n(t)\mathrm{d}t}$$

Cette somme ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie pour f.

Remarque 2.1

• **Pour justifier l'existence de l'intégrale d'une fonction sur un segment, il suffit donc de préciser qu'elle est continue par morceaux sur ce segment.**

• La valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ne dépend pas des valeurs $f(a_0)$, $f(a_1), \ldots, f(a_n)$.

• Si $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ alors f est continue par morceaux si, et seulement si, $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont, et dans ce cas, on a l'égalité :

$$\int_a^b f = \int_a^b Re(f) + i \int_a^b Im(f)$$

Definition 2.2

Soit $(\alpha,\beta)\in I^2$ et $f : I\to \mathbf{C}$ continue par morceaux, on définit $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t$ de la façon suivante :

- Si $\alpha<\beta$, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t=\int_{[\alpha,\beta]} f$ (au sens précédent).
- Si $\alpha=\beta$, on pose $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t=0$.
- Si $\alpha>\beta$, on pose $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t=-\int_{[\beta,\alpha]} f$ (au sens précédent).

3 Propriétés

On conserve la quasi totalité des propriétés de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue.

Proposition 3.1 *Linéarité*

Soient f, g dans $\mathcal{CM}([a,b],\mathbf{K})$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2$. On a : $\boxed{\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}$

Proposition 3.2 *Positivité et croissance*

Soient f, g dans $\mathcal{CM}([a,b],\mathbf{K})$.

- Si f est positive alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$.
- $\forall t\in[a,b]\quad f(t)\leqslant g(t)\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Proposition 3.3 *Inégalité triangulaire*

Si $f\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbf{K})$ alors $|f|\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbf{R})$ et on a :

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t}$$

Proposition 3.4 *Relation de Chasles*

Soit $f\in\mathcal{CM}(I,\mathbf{K})$ où I est un segment. Si a,b,c sont trois éléments de I alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\mathrm{d}t}$$

4 Primitives et intégrale d'une fonction continue

On rappelle les points suivants, avec I un intervalle de $\mathbf{R}$:

• Si f est une application de I dans $\mathbf{K}$, une primitive de f sur I est une application F **dérivable** sur I telle que $F' = f$.

• Si F et G sont deux primitives de f sur I alors il existe une constante $c \in \mathbf{K}$ telle que $F = G + c$.

• Si f est une fonction continue sur I, on pourra noter $\displaystyle\int^x f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.

Proposition 4.1 *Théorème fondamental de l'analyse*

Soit $f : I \to \mathbf{K}$ une fonction **continue** et a un point de I.

La fonction $F_a : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbf{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$ est **la** primitive de f sur I qui s'annule en a.

Cela signifie que : F_a est dérivable sur I avec $\forall x \in I \quad F_a'(x) = f(x)$ et $F_a(a) = 0$.

Exercice 1

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et T-périodique.
Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

Corollaire 4.2

Soit $f : I \to \mathbf{K}$ une fonction continue et $(a, b) \in I^2$.
Si F est une primitive de f sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Corollaire 4.3

Si $f : I \to \mathbf{K}$ est une fonction de classe C^1 alors

$$\forall (a, x) \in I^2 \quad f(x) - f(a) = [f(t)]_a^x = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$

Corollaire 4.4 *A savoir retrouver*

Soit $f : I \to \mathbf{K}$ une fonction continue.
Si α, et β sont deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I alors la fonction $\varphi : x \in J \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et

$$\forall x \in J \quad \varphi'(x) = \beta'(x) f(\beta(x)) - \alpha'(x) f(\alpha(x))$$

Corollaire 4.5 *Stricte positivité*

Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction **continue** et **positive**.

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \forall t \in [a, b] \quad f(t) = 0}$$

Par contraposée :

Si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est **continue**, **positive** et **non identiquement nulle**, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0$.

Ce résultat n'est plus valable si f est seulement continue par morceaux.

5 Calculs pratiques

5.1 Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur le segment $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbf{K}$ alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

5.2 Changement de variable sur un segment

Soient I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$.
Si $f : I \to \mathbf{K}$ est une fonction continue et $\varphi : J \to I$ est une fonction de classe C^1 alors

$$\forall(\alpha, \beta) \in J^2 \quad \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u))du$$

Et on dit que l'on effectué le changement de variable $t = \varphi(u)$.

5.3 Rappels sur les sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \to \mathbf{K}$. On appelle sommes de Riemann associée à f sur $[a, b]$:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \qquad T_n = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est continue sur } [a, b] \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} T_n = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t}$$

Exemple 5.1

Déterminer un équivalent de $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + n^2}$.

5.4 Primitives de référence

Fonctions	Primitives	Domaines de validité
$(x-a)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \setminus \{a\}$
$\dfrac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$	$]0,+\infty[$
$e^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{2(1-x)}+\dfrac{1}{2(1+x)}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}(x)=\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Arccos}(x)$	$]-1,1[$

5.5 Formules de Taylor

Soit $f \in C^n(I, \mathbf{K})$ et $a \in I$. On définit le polynôme de taylor de f en a à l'ordre n par :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

On peut voir que, sous certaines conditions, ce polynôme « approche » convenablement f au voisinage de a. Pour mesurer cette approximation, on s'intéresse à la différence $f(x)-T_n(x)$ et on regarde sir elle est « petite ». On appelle cette différence **reste de Taylor de f à l'ordre n en** a et on la note $R_n(x)$. Ainsi on a :

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Proposition 5.1 *Formule de taylor avec reste intégral*

Si $f : I \to \mathbf{K}$ est de classe C^{n+1} alors pour tout $(a, x) \in I^2$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Corollaire 5.2 *Inégalité de Taylor-Lagrange*
Si $f \in C^{n+1}(I, \mathbf{K})$, avec $a < b$, et si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur I alors on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant M \frac{|x-|)^{n+1}}{(n+1)!}$$

6 Quelques règles pratiques d'intégration

6.1 Calcul de $\int^x e^{\alpha t} P(t) \mathrm{d}t$ avec P polynôme

On intègre successivement par parties, pour faire "chuter" le degré de P. On obtient alors un polynôme Q de même degré que P tel que $\displaystyle\int^x e^{\alpha t} P(t) \mathrm{d}t = e^{\alpha x} Q(x) + cste$.

Exemple 6.1
Calculer $\displaystyle\int^x e^{-t}(t^2 - 2) \mathrm{d}t$.

6.2 Calcul de $\int^x e^{\alpha t} \cos(\beta t) \mathrm{d}t$ ou $\int^x e^{\alpha t} \sin(\beta t) \mathrm{d}t$

On pourra effectuer une double intégration par parties pour revenir sur l'intégrale de départ, ou bien passer par les intégrales de fonctions complexes en écrivant :

$$e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Exemple 6.2
Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-t} \sin(2t) \mathrm{d}t$.

6.3 Calcul de primitives de fractions rationnelles

Dans un premier temps, on décompose la fraction en éléments simples (voir l'annexe au paragraphe suivant). Par linéarité, on est amené à calculer les intégrales des fractions élémentaires suivantes :

$$\frac{1}{(x-a)^n} \text{ et } \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^2} \text{ avec } p^2 - 4q < 0$$

et éventuellement d'un polynôme.

- $\displaystyle\int^x \frac{1}{t-a} \mathrm{d}t = \ln|x-a| + c$ avec $c \in \mathbf{R}$.
- Pour $\alpha \neq 1$ $\displaystyle\int^x \frac{1}{(t-a)^\alpha} \mathrm{d}t = \frac{-1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + c$ avec $c \in \mathbf{R}$.
- Pour calculer $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^2+pt+q} \mathrm{d}t$, avec $p^2 - 4q < 0$, écrire $t^2 + pt + q = \left(t + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$, effectuer le changement de variable affine $u = t + \frac{p}{2}$ puis utiliser

$$\int^s \frac{1}{u^2+a^2} \mathrm{d}u = \frac{1}{a} \int^s \frac{1/a}{(u/a)^2+1} \mathrm{d}u = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{s}{a}\right) + c \quad c \in \mathbf{R}$$

Exemple 6.3

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t$.

• Pour calculer $\displaystyle\int^{x} \frac{at+b}{t^2+pt+q}\mathrm{d}t$ avec $p^2-4q<0$, faire apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur puis séparer en deux fractions.
L'une d'elle sera du type $\displaystyle\int^{x} \frac{u'(t)}{u(t)}\mathrm{d}t$ et l'autre se calcule comme précédemment.

Exemple 6.4

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t-1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t$.

• Enfin pour calculer $\displaystyle\int^{x} \frac{at+b}{(t^2+pt+q)^n}\mathrm{d}t$, avec $p^2-q<0$, comme précédemment séparer l'intégrale en deux.
L'une revient à intégrer $\dfrac{u'(t)}{u^n(t)}$, l'autre après changement de variable, se ramène au calcul de $\displaystyle\int^{s} \frac{1}{(1+u^2)^n}\mathrm{d}u$. On calcule cette dernière par intégrations successives en partant de $\displaystyle\int^{s} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Exemple 6.5

Calculer $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$.

7 Annexe : décomposition en éléments simples

On définit $\mathbf{R}(X)$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des fractions rationnelles par

$$\mathbf{R}(X)=\left\{\frac{P(X)}{Q(X)},\quad (P,Q)\in\mathbf{R}[X]\times\mathbf{R}[X] \text{ et } Q\neq 0\right\}$$

la notion de décomposition en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$ n'est pas au programme de PSI, mais il sera souvent utile d'en connaitre les principes pour effectuer certains calculs (primitives, développement en série entière). Les « éléments simples » de $\mathbf{R}(X)$ sont les suivants :

$$\frac{\alpha}{(X-a)^n} \text{ et } \frac{\beta X+\gamma}{(X^2+pX+q)^n} \text{ avec } p^2-4q<0$$

Division euclidienne de P par Q :

On sait qu'il existe un unique couple de polynômes (A,R) tel que

$$P(X)=A(X)Q(X)+R(X) \text{ avec } deg(R)<deg(Q)$$

En reportant dans $F=\dfrac{P}{Q}$, on obtient :

$$F(x)=\frac{P(X)}{Q(X)}=A(X)+\frac{R(X)}{Q(X)} \text{ avec } deg(R)<deg(Q)$$

On est donc amené au problème suivant :

Décomposition de $\dfrac{R(X)}{Q(X)}$ avec $deg(R) < deg(Q)$:

On effectue la décomposition en produit de facteurs irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ du polynôme Q :

$$Q(X) = \lambda.\prod_{i=1}^{r}(X-a_i)^{n_i} \times \prod_{j=1}^{s}(X^2+p_jX+q_j)^{m_j}$$

Alors on a une décomposition unique de $\dfrac{R(X)}{Q(X)}$ sous la forme :

$$\frac{R(X)}{Q(X)} = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\alpha_{1,i}}{X-a_i}+\frac{\alpha_{2,i}}{(X-a_i)^2}+\cdots+\frac{a_{n_i,i}}{(X-a_i)^{n_i}}\right)+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\beta_{1,j}X+\gamma_{1,j}}{X^2+p_jX+q_j}+\ldots+\frac{\beta_{m_j,j}X+\gamma_{m_j,j}}{(X^2+p_jX+q_j)^{m_j}}\right)$$

Exemple 7.1

Trouver des réels a, b, c, d tels que

$$F(X) = \frac{X^4+1}{(X-1)^2(X^2+1)} = \frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X-1)^2}+\frac{cX+d}{X^2+1}$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_2^3 \frac{t^4+1}{(t-1)^2(t^2+1)}\mathrm{d}t$.