$\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
On connait l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment . On cherche à définir, sous réserve d'existence, l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle I quelconque.
On traite les cas $I = [a, b[$, $I =]a, b]$ et $I =]a, b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

1 Intégrales généralisées (ou impropre)

1.1 Définitions

Definition 1.1 *Si $I = [a, b[$*

Soit $f : [a, b[\to \mathbf{K}$ une fonction **continue par morceaux**, avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ et $a < b$.

On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge (*ou existe*) lorsque la fonction $\begin{array}{ccc} [a, b[& \to & \mathbf{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$ admet une limite finie dans $\mathbf{K}$ en b.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge **et l'intégrale n'existe pas**.

Si l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge, alors on pose

$$\boxed{\int_{[a,b[} f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}$$

Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ *c'est étudier si cette intégrale est convergente ou divergente.*

Exemple 1.1

1. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$.
2. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{d}t$.
3. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)\mathrm{d}t$.
4. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{(t-2)^2}\mathrm{d}t$.

Remarque 1.1 *Notion locale*

La convergence d'une intégrale sur $[a, b[$ de $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbf{K})$ est une notion locale :
Pour la convergence de l'intégrale, seul compte le comportement de f au voisinage de b.
On peut remplacer a par n'importe quel point c de $[a, b[$:

$$\boxed{\text{Soit } c \in [a,b[,\ \int_{[a,b[} f \text{ converge} \iff \int_{[c,b[} f \text{ converge}}$$ (*les deux intégrales sont de même nature*)

Et en **cas de convergence** : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$

Proposition 1.1

• Si $f : [a,b[\to \mathbf{R}$ est continue par morceaux et **positive** alors :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \iff x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \text{ est majorée.}}$$

• On en déduit que pour f et g continues par morceaux sur $[a,b[$:

$$\boxed{\text{Si } 0 \leqslant f \leqslant g \text{ et } \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ converge alors } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Definition 1.2 *Si $I =]a,b]$*

Soit $f :]a,b] \to \mathbf{K}$ une fonction continue par morceaux, avec $a \in \mathbf{R}$ ou $a = -\infty$, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

On dit que l'intégrale de f sur $]a,b]$ converge (*ou existe*) lorsque la fonction $\begin{array}{ccc}]a,b] & \to & \mathbf{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \end{array}$ admet une limite finie dans $\mathbf{K}$ en a.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge (*et l'intégrale n'existe pas*).

Si l'intégrale de f sur $]a,b]$ converge, alors on pose

$$\boxed{\int_{]a,b]} f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t}$$

Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{]a,b]} f$ *c'est étudier si cette intégrale est convergente ou divergente.*

Exemple 1.2

1. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$
2. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^t\mathrm{d}t.$

3. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \cos(t)\mathrm{d}t$.

Remarque 1.2 *Notion locale*

Comme dans le cas $[a,b[$, l'intégrale sur $]a,b]$ d'une fonction continue par morceaux est une notion locale :

$$\boxed{\text{Soit } c \in]a,b],\ \int_{]a,b]} f \text{ converge} \iff \int_{]a,c]} f \text{ converge}}$$ (*les deux intégrales sont de même nature*)

En cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.

Definition 1.3 *Si $I =]a,b[$*

Soit $f :]a,b[\to \mathbf{K}$ une fonction continue par morceaux, avec $a \in \mathbf{R}$ ou $a = -\infty$, $b \in \mathbf{R}$ ou $b = +\infty$, $a < b$.

On dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ est convergente (*ou existe*) lorsqu'il existe $c \in]a,b[$ tel que les **deux intégrales** $\displaystyle\int_{]a,c]} f$ et $\displaystyle\int_{[c,b[} f$ **convergent**.

Dans ce cas, on pose $$\boxed{\int_{]a,b[} f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a}\int_x^c f(t)\mathrm{d}t + \lim_{y\to b}\int_c^y f(t)\mathrm{d}t}$$

Proposition 1.2

La définition précédente est indépendante du réel c :

si c existe, alors pour tout réel $c' \in]a,b[$ $\displaystyle\int_{]a,c']} f$ et $\displaystyle\int_{[c',b[} f$ convergent et $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{c'} f(t)\mathrm{d}t + \int_{c'}^b f(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 1.3

1. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\mathrm{d}t$ est convergente.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque 1.3 *Intégrales faussement impropres*

• Soit $f : [a,b[\to \mathbf{K}$ continue par morceaux, **avec** b **réel**. Si f admet une limite finie en b alors l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t$ converge et on dit qu'elle est faussement impropre en b.

• Soit $f :]a,b] \to \mathbf{K}$ continue par morceaux, **avec** a **réel**. Si f admet une limite finie en a alors l'intégrale $\displaystyle\int_{]a,b]} f(t)\mathrm{d}t$ converge et on dit qu'elle est faussement impropre en a.

• Soit $f :]a,b[\to \mathbf{K}$ continue par morceaux, avec $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $a < b$. Si f admet une limite finie en a et une limite finie en b alors l'intégrale $\displaystyle\int_{]a,b[} f(t)\mathrm{d}t$ converge et on dit qu'elle est faussement impropre en a et en b.

C'est par exemple le cas pour les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 t^2\ln(t)\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln^2(t)}{t-1}\mathrm{d}t$.

1.2 Intégrales de référence

Proposition 1.3 *Intégrales de Riemann*

Les intégrales de Riemann sont les intégrales du type $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Proposition 1.4 *Généralisation*

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$, et soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

- $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Proposition 1.5 *Fonctions logarithme et exponentielle*

Soit un réel α.

- $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

1.3 Premières propriétés des intégrales généralisées

Dans ce paragraphe, on considère $f : I \to \mathbf{K}$ et $g : I \to \mathbf{K}$ deux fonctions continues par morceaux sur $I =]a,b]$ ou $[a,b[$ ou $]a,b[$.

Proposition 1.6 *Linéarité*

Si les **deux** intégrales $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ sont **convergentes**, alors :

- $\displaystyle\int_I (f+g)$ est convergente et $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
- $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\displaystyle\int_I \lambda f$ est convergente et $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

On peut généraliser ce résultat au cas d'une combinaison linéaire de fonctions dont les intégrales impropres sont convergentes.

Proposition 1.7 *Relation de Chasles*

Si $\displaystyle\int_I f$ converge alors $\forall (a,b,c) \in \bar{I}^3$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \int_a^c f(t)\mathrm{d}t, \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent et

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 1.8 *Positivité et croissance*

- Si $f \geqslant 0$ et si $\displaystyle\int_I f$ converge alors $\displaystyle\int_I f \geqslant 0$. *(positivité)*
- Si $f \leqslant g$ sur I et si $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ convergent alors $\displaystyle\int_I f \leqslant \int_I g$. *(croissance)*
- Si f est positive, continue et d'intégrale nulle sur I alors f est nulle sur I.

2 Intégration par parties sur une intégrale généralisée

On considère deux fonctions u et v de classe C^1 sur un intervalle I.

Proposition 2.1

- **Cas I=]a,b]** :

  Si le produit $u.v$ admet une limite **finie en** a alors les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

- **Cas I=[a,b[** :

  Si le produit $u.v$ admet une limite **finie en** b alors les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

- **Cas I=]a,b[**
  Si le produit $u.v$ admet une **limite finie en** a **et une limite finie** b alors les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Et en cas de convergence des deux intégrales impropres, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \lim_b uv - \lim_a uv - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 2.1

Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$.

Remarque 2.1

Lorsque le produit uv admet une limite infinie en a et/ou en b, on pourra faire une intégration par parties sur un segment $[a,x] \subset [a,b[$, ou $[x,b] \subset]a,b]$ ou $[x,y] \subset]a,b[$ suivi d'un passage à la limite. Après étude d'une ou plusieurs formes indéterminées, on pourra parfois obtenir un résultat intéressant.

Exemple 2.2

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$.

3 Changement de variables sur une intégrale généralisée

• Si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe C^1, et si f est continue sur $]a,b[$ alors

$$\int_\alpha^\beta \varphi'(u) f\circ\varphi(u)\mathrm{d}u \text{ et } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}$$

Et en cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi'(u)(f\circ\varphi)(u)\mathrm{d}u$

• Si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement décroissante de classe C^1, et si f est continue sur $]a,b[$ alors

$$\int_\alpha^\beta \varphi'(u) f\circ\varphi(u)\mathrm{d}u \text{ et } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}$$

Et en cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta \varphi'(u)(f\circ\varphi)(u)\mathrm{d}u$

On peut regrouper les deux cas : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta |\varphi'(u)|(f\circ\varphi)(u)\mathrm{d}u$.

Exemple 3.1

1. Existence et calcul des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t \text{ en posant } u = \sqrt{t-1} \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t \text{ en posant } u = \sqrt{1+t^2}$$

2. Existence de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)}\mathrm{d}t$, en posant $t = \arctan(u^2)$.

4 Fonctions intégrables sur un intervalle

Dans toute cette partie f désigne une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.

Definition 4.1 *Intégrale absolument convergente et fonction intégrable*

1. On dit que **l'intégrale** de f sur I est **absolument convergente** lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_I |f|$ est convergente.
2. On dit que f est **intégrable** sur I lorsque f est continue par morceaux sur I et que l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente.

   Lorsque $I = [a, b[$, on dira que f est intégrable en b.
   Lorsque $I =]a, b]$, on dira que f est intégrable en a.

Remarque 4.1 *Cas particulier d'une fonction de signe constant*

Si $f : I \to \mathbf{R}$ est continue par morceaux et de **signe constant** alors :
f est intégrable sur I si et seulement si $\displaystyle\int_I f$ converge.

Exemple 4.1 *Fonctions de référence*

- La fonction ln est intégrable sur $]0, 1]$.
- La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$.
- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$,avec $a > 0$, si et seulement si $\alpha > 1$.
- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, a]$, avec $a > 0$, si et seulement si $\alpha < 1$.
- Toute fonction constante sur un intervalle I **borné** est intégrable sur cet intervalle.

Proposition 4.1 *Inégalité triangulaire*

Si f est **intégrable** sur I alors l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ converge

et on a :

$$\boxed{\left|\int_I f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_I |f(t)|\mathrm{d}t}$$

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de l'intégrale de Dirichlet : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$*, qui est alors dite semi-convergente.*

Proposition 4.2 *Etude pratique de l'intégrabilité par critères de comparaison*

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.

• Si $\|f\| \leqslant \|g\|$ sur $[a, b[$ alors l'intégrabilité de g en b entraine celle de f. *Et donc si f n'est pas intégrable en b alors g non plus.*
• Si $f(t) \underset{t\to b}{=} O(g(t))$ ou $f(t) \underset{t\to b}{=} o(g(t))$ alors l'intégrabilité de g en b entraine celle de f.
• Si $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en b est équivalente à celle de g.

On a les mêmes résultats sur $I =]a, b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ en remplaçant b par a dans les relations de comparaison.

Remarque 4.2 *Règle de $t^\alpha f(t)$* **A redémontrer sur chaque exemple**

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbf{K}$ continue par morceaux.

- Si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ *très rapidement*, on peut penser à regarder si $t^\alpha f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ avec $\alpha > 1$, car alors $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ et on peut conclure à l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.
- Si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ *lentement*, on peut penser à regarder si $t|f(t)| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\dfrac{1}{t} \underset{+\infty}{=} o(|f(t)|)$ et on peut conclure que f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

Proposition 4.3 *Espace $L^1(I, \mathbf{K})$*

L'ensemble des fonctions intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$, noté $L^1(I, \mathbf{K})$, est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Exemple 4.2

Étudier l'intégrabilité de f sur I :

- $f : t \mapsto \dfrac{\sin^3(t)}{t^2}$ et $I =]0, +\infty[$.
- $f : t \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln t}}{(t-1)\sqrt{t}}$ et $I =]1, +\infty[$.
- $f : t \mapsto \ln\left(\dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}\right)$ et $I =]0, +\infty[$.
- $f : t \mapsto \dfrac{t - \sin(t)}{t^\alpha}$ et $I =]0, +\infty[$ suivant les valeurs du réel α.

5 Quelques résultats particuliers à connaitre

5.1 Utilisation de la parité d'une fonction

• Cas d'une fonction paire

Si f est une fonction <u>paire</u> continue sur un intervalle $]-a, a[$, avec $0 < a \leqslant +\infty$, par changement de variable l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ converge et dans ce cas

$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$$

• Cas d'une fonction impaire

Si f est une fonction <u>impaire</u> continue sur un intervalle $]-a, a[$, avec $0 < a \leqslant +\infty$, par changement de variable l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ converge et dans ce cas

$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$$

5.2 Cas d'une fonction admettant une limite en $+\infty$

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, +\infty[$ et si f admet une limite L qui n'est pas nulle, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

5.3 Cas d'une fonction bornée sur un intervalle borné

Si f est une fonction continue par morceaux bornée sur un intervalle I borné alors $\displaystyle\int_I f$ converge.