Exercice 1

Étudier la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor \mathrm{d}t$ sur $\mathbf{R}^+$.

Exercice 2

Soit trois réels a, b et c tels que $0 < c < \dfrac{b-a}{2}$.

On considère les fonctions $f : x \in \mathbf{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x-t)\mathrm{d}t$.

Montrer que g est définie et continue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 3

Soit $f : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$ et $g : x \in]0, +\infty[\mapsto \dfrac{1}{x}$.

Montrer que $g \circ f$ est bien définie sur $[0,1]$. Est-elle continue par morceaux sur ce segment ?

Exercice 4

Montrer qu'il n'existe pas de fonction g continue sur $[0,1]$ telle que

$$\forall x \in [0,1] \quad \int_0^1 max(x,t)g(t)\mathrm{d}t = 1$$

Exercice 5

Étudier la fonction $f :]0,1[\cup]1, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln^2(t)}\mathrm{d}t$.

Exercice 6

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t\right)$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_x^{2x} \frac{\exp\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 7

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad 2yf(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 8

Pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^2$, on note $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q \mathrm{d}x$.

1. Déterminer une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.
2. Exprimer la valeur de $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

Exercice 9

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbf{R}^+$ continues. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

2. Soit $f \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x t f(t) \mathrm{d}t \right)$.

Exercice 10

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$ et f continue sur $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b] \quad f(a+b-x) = f(x)$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b t f(t) \mathrm{d}t = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) \mathrm{d}t$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t e^{it}}{1 + \cos^2(t)} \mathrm{d}t$.

Exercice 11

Déterminer les limites de la suite (u_n) lorsque :

- $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$
- $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$
- $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$
- $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$
- $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^a}$ avec $a \geqslant 1$

Exercice 12

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$, déterminer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} \mathrm{d}t$.

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = \sin(2\pi n! \mathbf{e})$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N} \quad \left(n!\mathbf{e} - \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathbf{e} \mathrm{d}t \right) \in \mathbf{Z}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).