1 Autour de l'intégrale de Dirichlet

Partie I -

I.A- Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0$$

I.B- On note $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$, pour $n \in \mathbf{N}$.

I.B.1) Justifier l'existence de J_n.

I.B.2) Calculer J_0, J_1, J_2, J_3.

I.B.3) Exprimer $J_n - J_{n-2}$ en fonction de n.
En déduire la valeur de J_{2n+1} et et une expression de J_{2n} sous la forme d'une somme partielle de série convergente.

I.B.4) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(J_n - J_{n-1}) = 0$ et en déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

I.B.5) Déduire des résultats précédents l'égalité : $\pi = 4\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

I.C-

I.C.1) Soit a un réel strictement positif. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbf{N}$.

I.C.2) Soit $a \in\,]0,\pi[$. Prouver que l'application f telle que $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$.

I.C.3) Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t\right)$ lorsque $a \in\,]0,\pi[$.

I.C.4) En déduire la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque $a = \dfrac{\pi}{2}$, $a < \dfrac{\pi}{2}$ et $a > \dfrac{\pi}{2}$.

I.D- En utilisant les résultats précédents et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{n\pi}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, montrer que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ admet $\dfrac{\pi}{2}$ pour limite lorsque x tend vers $+\infty$.

On posera $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

I.E- Pour $k \in \mathbf{N}$, montrer que $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u$.

En déduire que l'application $\left[t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}\right]$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$.

Partie II -

II.A- Montrer que, pour tout $n \geq 2$, l'application $\left[t \mapsto \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^n\right]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t$.

II.B- Montrer que : $I_1 = I_2$ (I_1 a été définie en **I.D**)._

II.C- Soit $n \in \mathbf{N}$, montrer que $I_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin u}{u + k\pi}\right)^{2n+1} \mathrm{d}u$.

En déduire que la suite $(I_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

II.D- Montrer que $\forall n \in \mathbf{N} \quad I_n > 0$.

2 Calcul d'une intégrale

1. Pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2xt + 1} \mathrm{d}t$.
   Justifier l'existence de cette intégrale puis la calculer au moyen d'une primitive.

2. On pose alors, pour tous réels a et b tels que $a^2 - 4b < 0$: $G(a, b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + at + b} \mathrm{d}t$.
   Donner pour $G(a, b)$ une expression très simple utilisant F.

3. Pour $a > 0$ et $a^2 - 4b < 0$, déterminer deux réels λ et μ tels que

$$\frac{X^2 + 1}{(X^2 + aX + b)(X^2 - aX + b)}) = \frac{\lambda X + \mu}{X^2 + aX + b} + \frac{-\lambda X + \mu}{X^2 - aX + b}$$

4. Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 + X^2 + \dfrac{1}{2}$ dans $\mathbf{R}[X]$.

5. En utilisant le changement de variable $t = \tan(\theta)$ et les résultats précédents calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin^4(\theta)} \mathrm{d}\theta$.

Fin de l'énoncé