Exercice 1

Montrer que pour tout réel α l'intégrale $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\mathrm{d}t$ converge. La calculer en effectuant le changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$.

Exercice 2

Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^5}{(1+t^4)\sqrt{t}}\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{Arctan(t)}{t^2+2t+7}\mathrm{d}t \qquad \int_0^{1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t^3-2t^2+t}}\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{+\infty} t^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t(1+\ln t)^2}\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan t}{t}\mathrm{d}t$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t}\mathrm{d}t \qquad \int_0^{1} \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right|\mathrm{d}t$$

Exercice 3

Déterminer les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que la fonction $f : t \mapsto \sqrt{P(t)} - t^2 - t - 1$ soit intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 4

Vérifier l'égalité suivante $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n\mathrm{d}t = n!$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 5

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ intégrable sur $\mathbf{R}^+$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 6

Montrer la convergence puis calculer les intégrales suivantes par changement de variable :

- $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$.
- $I_2 = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ en posant $u = \sqrt{1+x^2}$.
- $I_3 = \displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$.
- $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ en posant $x = \dfrac{1}{u}$.
- $I_5 = \displaystyle\int_{1}^{5} \sqrt{\frac{4t}{t-1}}\mathrm{d}t$ en posant $u = \sqrt{\dfrac{t}{t-1}}$.

Exercice 7

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction continue, décroissante et intégrable sur $[0, +\infty[$.

1. En utilisant $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} tf(t)\mathrm{d}t = 0$ (utiliser un encadrement).

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t(f(t)-f(t+1))\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

Exercice 8

1. Montrer que $\forall x\in]0,1[,\quad \dfrac{x-1}{x}\leqslant \ln(x)<x-1$.
2. Montrer que la fonction $f : x\mapsto \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ se prolonge par continuité en une fonction continue sur $[0,1]$.
3. Montrer que la fonction $g : x\mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ se prolonge par continuité en une fonction continue sur $[0,1[$.
4. Montrer que $\forall a\in]0,1[,\quad \displaystyle\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=\int_a^{a^2} g(x)\mathrm{d}x$.
5. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\mathrm{d}x=\ln(2)$.

Exercice 9

1. Pour $a>0$, montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\cos u-1}{u^3}\mathrm{d}u$ converge. Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos u-1}{u^3}\mathrm{d}u$.
2. Montrer que la fonction φ telle que : $\varphi(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos u-1}{u^3}\mathrm{d}u$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$.
3. Etudier la limite lorsque x tend vers 0 de $\displaystyle\int_x^1\frac{\cos u-1}{u^3}\mathrm{d}u+\int_x^1\frac{\mathrm{d}u}{2u}$.
4. En déduire un équivalent de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0.
5. La fonction φ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 10

Donner le domaine de définition de la fonction définie par $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+x^2}\mathrm{d}t$. Calculer $f(1)$ puis en effectuant un changement de variable, $f(x)$ pour $x>0$.

Exercice 11

Soit f continue et bornée sur $\mathbf{R}$, et $g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}f(x-t)\mathrm{d}t$. Montrer que la fonction g est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$, vérifiant $g''=g-2f$.

Exercice 12

Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{n+t}\mathrm{d}t\sim\frac{1}{n}$. En déduire que : $\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t\sim\frac{e^{-n}}{n}$.