Dans tout ce chapitre n désigne un entier naturel non nul et $\mathbf{K}$ désigne l'ensemble des réels $\mathbf{R}$ ou l'ensemble des complexes $\mathbf{C}$ et E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

1 Trace d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme

1.1 Matrices semblables

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n, on dit que B est semblable à A lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que $\boxed{A = P.B.P^{-1}}$

La relation "est semblable à " est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$:
A est semblable à A. Si B est semblable à A alors A est semblable à B. Si A est semblable à B et B est semblable à C alors A est semblable à C.

Cela revient à dire que A et B représente un même endomorphisme u.

Remarque 1

Si A et B sont semblables alors $rg(A) = rg(B)$.

1.2 Trace d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme

On appelle trace d'une matrice carrée la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\boxed{\text{Si } A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}}$$

- L'application $Tr : A \mapsto Tr(A)$ est une forme linéaire.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ alors $\boxed{Tr({}^tA) = Tr(A)}$
- Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ alors $\boxed{Tr(AB) = Tr(BA)}$
- *Invariance par similitude* :

  Si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et si P est dans $GL_n(\mathbf{K})$ alors $\boxed{Tr(P^{-1}AP) = Tr(A)}$

  Ce qui revient à dire que deux matrices semblables ont même trace.

En dimension finie, on définit alors la trace d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ comme étant la trace de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E : $\boxed{Tr(u) = Tr(Mat_{\mathcal{B}}(u))}$

Exemple 1

Montrer que pour tout projecteur p, $Tr(p) = rg(p)$.

2 Déterminant d'une matrice carrée

2.1 Définitions

Definition 1

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$.

1. f est multilinéaire si pour tous $(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n$ et $i \in [\![1, n]\!]$, l'application $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \mapsto f(X_1, \ldots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ est une forme linéaire.

2. La forme linéaire f est *alternée* si pour tout $(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n$ $f(X_1, \ldots, X_n) = 0$ dès lors qu'il existe $i \neq j$ tel que $X_i = X_j$.

3. La forme linéaire f est *antisymétrique* si $\forall (X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})^n$ et $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$

$$f(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_n) = -f(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_j, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_i, X_{j+1}, \ldots, X_n)$$

Exemple 2

Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ une forme multilinéaire antisymétrique et alternée. Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$, exprimer $f(M)$ en fonction de $f(I_2)$.

Proposition 1 antisymétrimétrique versus alternée

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ une forme multilinéaire.

L'application f est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

Proposition 2 Definition 2

Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

Il existe une unique forme multilinéaire alternée sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ vérifiant $f(I_n) = 1$.

L'application est appelée déterminant, notée *det*.

Notation : Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

Exemple 3

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
2. Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, exprimer $det(A)$.

2.2 Règles de calcul

- Linéarité par rapport à chacune des colonnes de la matrice :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & & C_i+C_i' & & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i}+a'_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i}+a'_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & & C_i & & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & & C_i' & & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a'_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a'_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & & \lambda C_i & & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array} = \lambda \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & & C_i & & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array}$$

- *Conséquence :* $det(\lambda A) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \lambda C_1 & & \lambda C_i & & \lambda C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,i} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,i} & \cdots & \lambda a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array} = \lambda^n \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & & C_i & & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array}$

- *Antisymétrie* :

  Pour $i \neq j$: $\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} C_1 & & C_i & & C_j & & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array} = - \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} C_1 & & C_j & & C_i & & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array}$

- *Conséquences :*

  - Si une colonne est nulle, alors le déterminant est nul : $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n} & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0$

• Si deux colonnes sont identiques, alors le déterminant est nul :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} C_1 & & C_i & & C_j=C_i & & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array} = 0$$

• Plus généralement, si l'une des colonnes est combinaison linéaire des autres, alors le déterminant est nul : si $C_i = \sum_{j\neq i} \lambda_j C_j$ alors

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} C_1 & & C_i & & C_j & & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array} = \sum_{j\neq i} \lambda_j \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} C_1 & & C_j & & C_j & & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array}}_{=0} = 0$$

Remarque 2 *Effet des opérations élémentaires sur un déterminant*

- Si on multiplie une colonne par un scalaire non nul : $C_i \leftarrow \lambda C_i$, alors le déterminant est multiplié par λ.
- Si on échange deux colonnes $C_i \leftrightarrow C_j$, alors le déterminant est transformé en son opposé.
- Si on ajoute à une colonne un multiple d'une autre colonne : $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, alors le déterminant reste inchangé.
- Plus généralement, si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes : $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j C_j$, alors le déterminant reste inchangé.

2.3 Propriétés

Proposition 3

$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}$

- $\boxed{det(AB) = det(A)det(B)}$ *On dit que le déterminant est multiplicatif.*
- $\boxed{det(\lambda A) = \lambda^n det(A), \text{ en particulier } det(-A) = (-1)^n det(A).}$

Proposition 4 *Caractérisation des matrices inversibles*

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors

$$A \text{ est inversible} \Longleftrightarrow det(A) \neq 0$$

Et dans ce cas, $det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{det(A)}$.

Remarque 3 *Matrices semblables*

On déduit de la propriété précédente que pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont semblables alors } det(A) = det(B).}$$

Proposition 5

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad det\left({}^tA\right) = det(A)$$

Remarque 4

On en déduit que si l'on note $C_1, .., C_n$ et $L_1, .., L_n$ les n colonnes et les n lignes d'une matrice A carrée d'ordre n , $det(A) = det(C_1, .., C_n) = det(L_1, .., L_n)$ et le déterminant est aussi une forme multilinéaire alternée (donc antisymétrique) des lignes.

Le déterminant reste donc inchangé par toute opération élémentaire sur les lignes du type : pour $i \neq k$ et $\alpha_i \in \mathbf{K}$, $L_k \leftarrow L_k + \alpha_i L_i$ et transformé en son opposé par l'opération élémentaire : $L_k \longleftrightarrow L_i$.

2.4 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Notations : Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note A_{ij} la matrice obtenue à partir de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Definition 3 *Mineur et cofacteur*

Soit $[\![1, n]\!]^2$.

1. On appelle mineur d'indice (i, j) (ou du coefficient $a_{i,j}$) le scalaire, noté Δ_{ij}, défini par $\Delta_{ij} = det(A_{ij})$.

2. On appelle cofacteur d'indice (i, j) (ou du coefficient $a_{i,j}$), le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}det(A_{ij})$.

Proposition 6 *Développement selon une ligne ou une colonne*

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

- *Développement par rapport à la j-ème colonne :* $\boxed{det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}}$

- *Développement par rapport à la ième ligne :* $\boxed{det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}}$

Proposition 7

Si $T=(t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice triangulaire alors $\boxed{det(T)=\prod_{i=1}^{n} t_{i,i}.}$

Exemple 4

1. Calculer $\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 2 & & n \end{vmatrix}$.
2. Déterminer, pour $n\in\mathbf{N}^*$, $\Delta_n=\begin{vmatrix} 3 & 1 & & 0 \\ 2 & 3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

3 Déterminant d'un endomorphisme

Dans tout ce paragraphe, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbf{N}^*$
Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. On sait que les matrices de u dans les différentes bases de E sont semblables, alors

$$det\left(Mat_{\mathcal{B}}(u)\right)=det(Mat_{\mathcal{B}'}(u))$$

Ce scalaire s'appelle le déterminant de u et se note $det(u)$.

Proposition 8

1. Si u et v sont deux endomorphismes de E alors $det(u\circ v)=det(u).det(v)$.
2. $u\in GL(E)\Longleftrightarrow det(u)\neq 0$. Et dans ce cas, $det(u^{-1})=\dfrac{1}{det(u)}$.

4 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Dans tout ce paragraphe, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbf{N}^*$ muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$.

Definition 4

Soit $x_1,\dots,x_n$, n vecteurs de E. On appelle déterminant de la famille $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ le déterminant de la matrice de la famille $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. On le note $det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)$.

$$det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & & x_i & & x_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}\begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Remarque 5

1. $det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = det(I_n) = 1$.

2. L'application $\begin{array}{ccc} E^n & \to & \mathbf{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$ est multilinéaire (*linéaire par rapport à chacune des variables* x_i), antisymétrique et donc alternée.

Proposition 9

Soient n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ de E.

$(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

5 Déterminant de Vandermonde

Definition 5 *Déterminant de Vandermonde*

Pour $n \geqslant 2$,et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, on appelle déterminant de Vandermonde le déterminant suivant :

$$\boxed{V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}}$$

Remarque 6

Si $P \in \mathbf{K}[X]$ est un polynôme de degré n et unitaire (de coefficient dominant égal à 1), alors

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} & P(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} & P(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & \lambda_{n+1} & \lambda_{n+1}^2 & \cdots & \lambda_{n+1}^{n-1} & P(\lambda_{n+1}) \end{vmatrix}$$

Que remarquez-vous pour $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$?

Proposition 10

Pour $n \geqslant 2$,et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$,

$$\boxed{V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)}$$

Exemple 5

Grâce à un déterminant de Vandermonde justifier que si $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ sont $n+1$ scalaires distincts alors

$$\forall (z_0, \ldots, z_n) \in \mathbf{K}^{n+1} \quad \exists ! P \in \mathbf{K}_n[X] \text{ tel que } \forall i \in [\![0, n]\!] \quad P(\lambda_i) = z_i$$

6 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Proposition 11

Si $a_0, \ldots, a_n$ sont n+1 scalaires 2 à 2 distincts, alors l'application $\varphi : P \mapsto (P(a_0), \ldots, P(a_n))$ est un isomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$ dans $\mathbf{K}^{n+1}$.

Definition 6

Soit $a_0, \ldots, a_n$ n+1 scalaires distincts 2 à 2.

On déduit de la propriété précédente, qu'il existe d'uniques polynômes $L_0, \ldots, L_n$ de $\mathbf{K}_n[X]$ tels que :

$$\forall (i, k) \in [\![0, n]\!]^2 \quad L_k(a_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$$

La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ s'appelle la famille des polynômes interpolateur de Lagrange aux n+1 points $a_0, \ldots, a_n$:

$$L_k = \varphi^{-1}(e_k) \text{ avec } e_k \text{ le } k^{\text{ième}} \text{ vecteur de la base canonique de } \mathbf{K}_n[X].$$

Proposition 12

Soit $a_0, \ldots, a_n$ n+1 scalaires distincts 2 à 2.
La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ des polynômes interpolateur de Lagrange en ces n+1 points est **une base** de $\mathbf{K}_n[X]$, et on a :

$$\boxed{\forall P \in \mathbf{K}_n[X] \quad P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) L_k}$$

En particulier $L_0 + L_1 + \ldots + L_n = 1$.

Remarque 7

Soit $a_0, \ldots, a_n$ n+1 scalaires distincts 2 à 2.

Le déterminant de Vandermonde $V(a_0, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$ est le déterminant de la matrice de passage de la base des polynômes interpolateurs de Lagrange vers la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.

Remarque 8 *Expression explicite des polynômes d'interpolation de Lagrange*

Soit $a_0, \ldots, a_n$ n+1 scalaires distincts 2 à 2.

Par définition $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad L_k(a_k) = 1$ et pour $j \neq k$ $L_k(a_j) = 0$, on en déduit que

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!] \quad L_k = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}}$$

7 Polynôme d'endomorphisme ou de matrice carrée

Dans ce paragraphe E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors :

- le polynôme de l'endomorphisme u, noté $P(u)$, est l'endomorphisme défini par :

$$\boxed{P(u) = a_0 Id_E + \sum_{k=1}^{p} u^k}$$

- le polynôme de la matrice M, noté $P(M)$, est la matrice définie par :

$$\boxed{P(M) = a_0 I_n + \sum_{k=1}^{p} a_k M^k}$$

Remarque 9

- Si D est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et $P \in \mathbf{K}[X]$, exprimer $P(D)$.
- Si $P \in \mathbf{K}[X]$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $U \in GL_n(\mathbf{K})$, exprimer $P\left(U.M.U^{-1}\right)$ en fonction de $P(M)$:

Proposition 13

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, pour tout $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$ et tout $\alpha \in \mathbf{K}$, on a :

$$\boxed{\begin{aligned}&(P+Q)(u) = P(u) + Q(u)\\ &(\lambda P)(u) = \lambda.P(u)\\ &(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)\end{aligned}}$$

de même avec une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Definition 7 *Polynôme annulateur*

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Le polynôme P est appelé **polynôme annulateur** de u (resp. de M), si $P \neq 0$ et $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (resp. $P(M) = O_n$).

Exemple 6

Un polynôme annulateur de :

- p projecteur de E est :

- s symétrie vectorielle est :

- J_n la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 est :

- $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est :

Proposition 14

- Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ admet un polynôme annulateur (de degré au plus n^2).

- En dimension finie, tout endomorphisme u admet un polynôme annulateur.

Exemple 7

L'endomorphisme $u : \begin{array}{c} \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X] \\ Q \mapsto XQ \end{array}$ n'admet pas de polynôme annulateur.

Utilisation d'un polynôme annulateur :

- ***Puissance d'endomorphisme ou de matrice*** :

  Si P est un polynôme annulateur de u ou de M, par division euclidienne de X^j par P, on peut calculer u^j ou M^j pour tout entier j.

- ***Inverse de matrice ou d'endomorphisme***

  Si P est un polynôme annulateur de u (resp. de M) tel que $P(0) \neq 0$ alors u (resp. M) est inversible et on peut exprimer u^{-1} (resp. M^{-1}) comme un polynôme en u (resp. M).

  Exemple avec la matrice M précédente pour le calcul de M^k et la recherche de M^{-1}.

8 Espace produit et somme de sous-espaces vectoriels

8.1 Espace produit de sous-espaces vectoriels

Si $E_1, \dots, E_p$ sont p sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel, on définit le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_p$ par :

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p), \forall i \in [\![1, p]\!], \quad x_i \in E_i\}$$

Proposition 15

1. $E_1 \times \dots \times E_p$ muni des lois ci-dessous, est un **K**-espace vectoriel :
   - $(x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$
   - $\lambda.(x_1, \dots, x_p) = (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_p)$.
2. Si $E_1, \dots, E_p$ sont de dimension finie alors leur produit $E_1 \times \dots \times E_p$ est aussi de dimension finie et

$$\boxed{dim\,(E_1 \times \dots \times E_p) = \sum_{i=1}^{n} dim(E_i)}$$

En particulier, si E est de dimension finie, $E \times \dots \times E = E^n$ et $dim(E^n) = n.dim(E)$.

8.2 Sommes, sommes directes, sous-espaces supplémentaires

Cas de deux sous-espaces vectoriels

Definition 8 *Somme*

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle somme de F et de G l'ensemble des vecteurs de E qui sont la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On le note $F + G$.

$$x \in F + G \iff \exists (y, z) \in F \times G, \quad x = y + z$$

Proposition 16

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$.
3. Soit H un sous-espace vectoriel de E.
   Si $F \subset H$ et $G \subset H$ alors $F + G \subset H$.

   Ainsi $F + G$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant F et G.

Definition 9 *Somme directe*

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme $F+G$ est directe lorsque :

$$\forall x \in F+G \quad \exists!(y,z) \in F \times G, \quad x = y+z$$

Proposition 17 *Caractérisation*

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\text{La somme } F+G \text{ est directe} \iff F \cap G = \{0\}$$

On note alors $F+G = F \oplus G$.

Definition 10 *Sous-espaces supplémentaires*

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que F et G sont supplémentaires dans E lorsque tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$\forall x \in E, \quad \exists!(y,z) \in F \times G, \quad x = y+z$$

Ce qui revient à $E = F \oplus G$ ou encore à $\left\{ \begin{array}{l} E = F+G \\ F \cap G = \{0\} \end{array} \right.$.

Exemple 8

1. Si $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, $F = \{f \in E, \quad f \text{ est paire}\}$ et $G = \{f \in E, \quad f \text{ est impaire}\}$ alors $E = F \oplus G$.

2. Si $E = \mathbf{R}[X]$, $F = \mathbf{R}_0[X]$ et $G = \{P \in E, \quad P(0) = 0\}$ alors $E = F \oplus G$.

3. Si $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $F =$ et $G =$ alors $E = F \oplus G$.

Proposition 18 *Recollement de bases*

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base de G alors $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Cette base $\mathcal{B}$ est obtenue par recollement des bases de F et G, on dit aussi que c'est une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

Proposition 19 *Formule de Grassmann*

Si E est de dimension finie et si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors

$$dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

En particulier $dim(F \oplus G) = dim(F) + dim(G)$.

On en déduit qu'en dimension finie, on a :

$$E = F \oplus G \iff \left\{ \begin{array}{l} E = F+G \\ dim(E) = dim(F) + dim(G) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} F \cap G = \{0\} \\ dim(E) = dim(F) + dim(G) \end{array} \right.$$

Proposition 20 *Base adaptée à un sous-espace*

Soit E de dimension finie égale à n et soit F un sous-espace vectoriel de E.

Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F alors, d'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$ tels que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ soit une base de E.
$\mathcal{B}$ est appelée base de E adaptée au sous-espace vectoriel F.

Et $G = Vect(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est un supplémentaire de F dans E.

Cas de p sous-espaces vectoriels

Definition 11 *Somme de p sous-espaces vectoriels*

Soit $E_1, \ldots, E_p$, p sous-espaces vectoriels de E.

On appelle somme de $E_1, \ldots, E_p$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont la somme d'un vecteur de E_1, et d'un vecteur de $E_2, \ldots$, et d'un vecteur de E_p. On le note $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} E_k$:

Soit $x \in E$,

$$x \in \sum_{k=1}^{p} E_k \Longleftrightarrow \exists (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \quad x = \sum_{k=1}^{p} x_k$$

Proposition 21

Soit $E_1, \ldots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} E_k$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\forall i \in [\![1, p]\!], \quad E_i \subset \displaystyle\sum_{k=1}^{p} E_k$.
3. Soit H un sous-espace vectoriel de E.

   Si $\forall i \in [\![1, p]\!], \quad E_i \subset H$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} E_k \subset H$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} E_k$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $E_1, \ldots, E_p$.

Definition 12 *Somme directe*

Soit $E_1, \ldots, E_p$, p sous-espaces vectoriels de E.

On dit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} E_k$ est directe lorsque : $\forall x \in \displaystyle\sum_{k=1}^{p} E_k, \quad \exists! (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \quad x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k$.

Dans ce cas on note : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} E_k = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$.

Proposition 22 *Caractérisation*

Soit $E_1, \ldots, E_n$ n sous-espaces vectoriels de E.

La somme $\sum_{k=1}^{p} E_k$ est directe si, et seulement si

$$\boxed{\forall (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \quad \left(\sum_{k=1}^{p} x_k = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0 \right)}$$

Remarque 10 *Attention*

$E_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x = 0\}$, $E_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad y = 0\}$ et $E_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x = y\}$ sont trois sous-espaces vectoriels tels que $E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_3 = E_3 \cap E_1 = \{0\}$ mais la somme $E_1 + E_2 + E_3$ n'est pas directe.

Definition 13 *Sous-espaces supplémentaires*

Soit $E_1, \ldots, E_p$, p sous-espaces vectoriels de E.

On dit que $E_1, \ldots, E_p$ sont supplémentaires (dans E) lorsque :

$$\forall x \in E, \quad \exists! (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \quad x = \sum_{k=1}^{p} x_k$$

Ce qui revient à : $E = \sum_{k=1}^{p} E_k$ et $\sum_{k=1}^{p} E_k = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$, ou plus directement $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$.

Proposition 23 *Somme et dimension*

Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension finie et

$$\boxed{\text{et } dim \left(\sum_{k=1}^{p} E_k \right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} dim(E_k)}$$

avec égalité si, et seulement si **la somme est directe.**

Definition 14 *Base adaptée à une somme*

On suppose que E est de dimension finie égale à n.
Soit $E_1, \ldots, E_p$, p sous-espaces vectoriels de E.

- $\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} E_i \text{ est une somme directe et } dim(E) = \sum_{i=1}^{p} dim(E_i)}$

- On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et que $\forall i \in [\![1,p]\!] \quad \mathcal{B}_i$ est une base de E_i.

  La juxtaposition $\bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ est une base de E, appelée *base adaptée à la décomposition en somme directe de* E.

Proposition 24 *Sous-espaces supplémentaires par fractionnement d'une base*
Si $(e_i)_{i\in I_1}, \dots, (e_i)_{i\in I_p}$ sont p familles de vecteurs de E telles que $(e_i)_{i\in\bigcup_k I_k}$ soit une base de E alors $E = \bigoplus_{k=1}^{p} Vect(e_i)_{i\in I_k}$.

9 Matrices par blocs et sous-espaces vectoriels stables

9.1 Matrices par blocs

9.1.1 Ecriture d'une matrice par blocs

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Soient $i \in [\![2, n-1]\!]$ et $j \in [\![2, p-1]\!]$, on peut faire apparaître la ligne d'indice i et la colonne d'indice j :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,p} \\ & & & & & \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Notons $B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{i,j}(\mathbf{K})$, $\quad C = \begin{pmatrix} a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{i,p-j}(\mathbf{K})$,

$$D = \begin{pmatrix} a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-i,j}(\mathbf{K}) \text{ et } E = \begin{pmatrix} a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-i,p-j}(\mathbf{K})$$

On peut écrire la matrice A par blocs, de la façon suivante : $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$.

9.1.2 Opérations par blocs de tailles compatibles

Proposition 25 *Addition et multiplication par un scalaire ou une matrice*

Soient $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $A' = \begin{pmatrix} B' & C' \\ D' & E' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

Si les blocs sont de tailles compatibles, $A + \lambda A' = \begin{pmatrix} B + \lambda B' & C + \lambda C' \\ D + \lambda D' & E + \lambda E' \end{pmatrix}$.

Proposition 26 *Produit par blocs*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on peut écrire $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cdots C_p \end{pmatrix}$.

   Si $B \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbf{K})$ alors $BA = \begin{pmatrix} BC_1 \cdots BC_p \end{pmatrix}$.

2. Soient $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $A' = \begin{pmatrix} B' & C' \\ D' & E' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbf{K})$.

   Si le produit BB' existe, alors $AA' = \begin{pmatrix} BB' + CD' & BC' + CE' \\ DB' + ED' & DC' + EE' \end{pmatrix}$

   Plus précisément, si le produit BB' existe, alors on peut effectuer tous les produits de la formule, et on a l'égalité.

   Un produit par blocs s'effectue comme si les blocs étaient des coefficients.

Proposition 27 *Transposition par blocs*

Si $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, alors $A^T = \begin{pmatrix} B^T & D^T \\ C^T & E^T \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbf{K})$

Ainsi pour transposer une matrice écrite par blocs, on modifie l'ordre des blocs comme s'il s'agissait de coefficients et on les remplace par leur transposée.

Remarque : Les formules précédentes se généralisent au cas de matrices écrites avec un nombre de blocs supérieur à 4.
La formule du produit par blocs est la même que celle avec des coefficients, à condition que les tailles des blocs soient compatibles.

9.1.3 Cas d'une matrice carrée

Definition 15

1. Une matrice **triangulaire par blocs** est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de la forme :

   $$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ O & A_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \cdots & O & A_{pp} \end{pmatrix} \text{ avec, pour tout } i \in [\![1, p]\!], \quad A_{ii} \text{ une matrice carrée.}$$

2. Une matrice **diagonale par blocs** est une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ O & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A_{pp} \end{pmatrix} \text{ avec, pour tout } i \in [\![1,p]\!], \quad A_{ii} \text{ une matrice carrée.}$$

Exemple 9

• Matrice d'un projecteur : $E = Im(p) \oplus Ker(p) = Ker(p - Id_E) \oplus Ker(p)$ dans une $\mathcal{B}$ base adaptée on a $M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} & O \\ O & \end{pmatrix}$.

• Matrice d'une symétrie : $E = Ker(s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E)$ et dans une base $\mathcal{B}$ adaptée $M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} & O \\ O & \end{pmatrix}$.

Proposition 28 *Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs*

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K})$, alors

$$det \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = det(A).det(C)$$

On peut généraliser :

$$\text{Si } \forall i \in [\![1,p]\!] \quad A_i \text{ est une matrice carrée alors } det \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ O & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ O & \cdots & O & A_p \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{p} det(A_i) \; .$$

9.2 Sous-espaces vectoriels stables

Dans tout ce paragraphe, u et v désignent des endomorphismes de l'espace vectoriel E.

Definition 16 *Sous-espace vectoriel stable, endomorphisme induit*

Soit F un sous-espace vectoriel de E et u un endomorphisme de E.

On dit que **F est stable par u** lorsque $u(F) \subset F$:

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F$$

Dans ce cas, on appelle **endomorphisme induit par u sur F**, l'application $v \in \mathscr{L}(F)$ définie par :

$$\forall x \in F \quad v(x) = u(x)$$

Proposition 29 *Caractérisation de la stabilité d'un sous-espace*

On suppose ici que E est de dimension finie égale à n et que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

On note $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F, $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de G et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ la base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

On note aussi $A = M_{\mathcal{B}}(u)$, et on écrit A par blocs : $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ avec $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$.

1. F est stable par u si et seulement si $A_3 =$

2. G est stable par u si et seulement si $A_2 =$

3. F et G sont stables par u si et seulement si A est

Remarque 11

On déduit de ce qui précède que si F est un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F, alors :

F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$, avec B la matrice de l'endomorphisme induit par u sur F.

Proposition 30 *Généralisation à une décomposition de E en somme directe*

On suppose que $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectorielssupplémentaires dans E et que E est de dimension finie. On note $n_i = dimF_i$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

$\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\quad F_i$ est stable par l'endomorphisme $u \iff A = \begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ O & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A_{pp} \end{pmatrix}$ où A est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

De plus dans ce cas, pour tout i de $[\![1, p]\!]$ la matrice A_{ii} est la matrice de l'endomorphisme induit par u sur F_i.

Proposition 31

Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent alors le noyau de u est stable par v.
On en déduit que pour tout polynôme P, le noyau de $P(u)$ est stable par u.